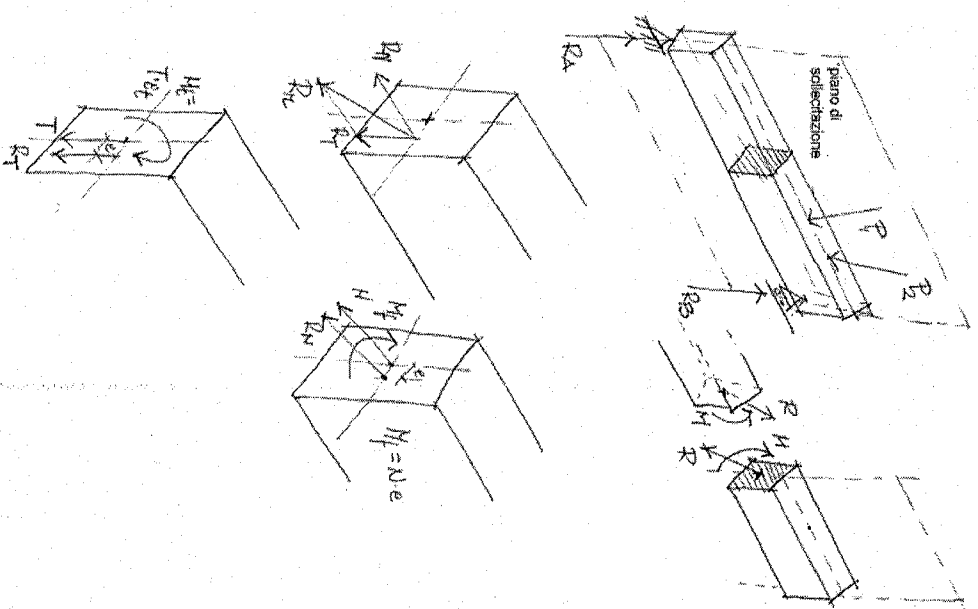


Il modo per individuare all'interno degli elementi le sollecitazioni è quello di "spezzarli" in due parti e di individuare delle forze interne che equilibrano quelle esterne (risultanti relative).

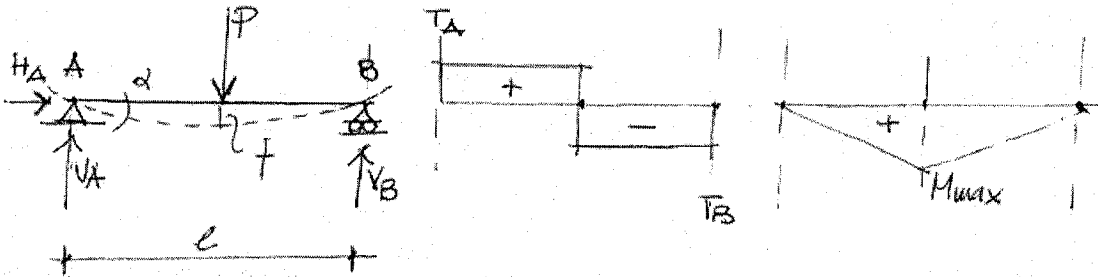
Nel caso specifico si può scomporre la risultante relativa ad uno stato di sollecitazione piano in una forza normale R_n al piano ed in una tangente R_t .

La prima si può sostituire con un sistema equivalente (N e M_f) e così pure la seconda (T e M_t).



Elementi inflessi

Carico concentrato in mezzeria



$$M_A = M_B = 0$$

$$V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

$$T_{A_{des}} = V_A = \frac{P}{2}$$

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

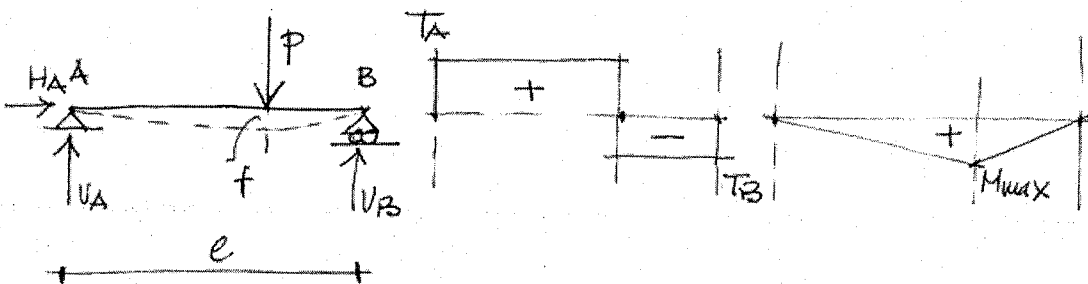
$$M_{max} = +\frac{Pl}{4}$$

$$H_A = 0$$

$$T_B = -\frac{P}{2}$$

$$\alpha = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

Carico concentrato non in mezzeria



$$f_c = \frac{1}{3} \frac{Pa^2b^2}{EJl}$$

$$T_{A_{des}} = V_A = T_{C_{sin}}$$

$$V_A = \frac{Pb}{l}$$

$$M_A = M_B = 0$$

$$T_{C_{des}} = \frac{-Pa}{l}$$

$$V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$M_C = +\frac{Pab}{l}$$

$$\alpha = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EJl}$$

$$T_x = \frac{Pb}{l}$$

$$H_A = 0$$

$$M_x = \frac{Pb}{l}x$$

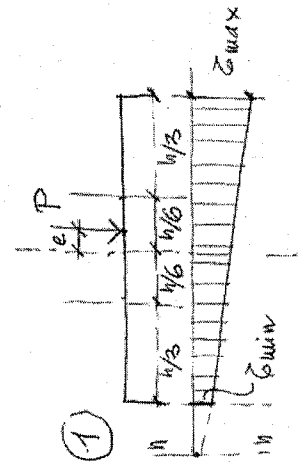
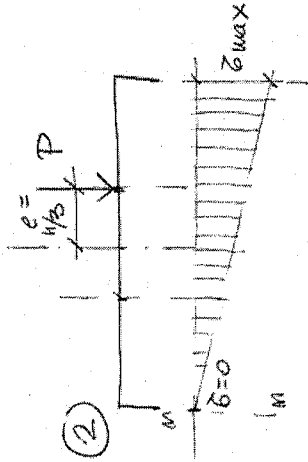
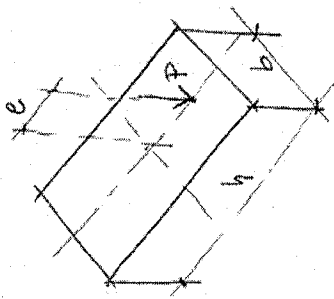
Sollecitazioni composte: presso flessione

A sinistra, pressoflessione in una sezione rettangolare.

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{P}{A} \pm \frac{Pe}{W} \leq \sigma_{amm}$$

$e =$ eccentricità

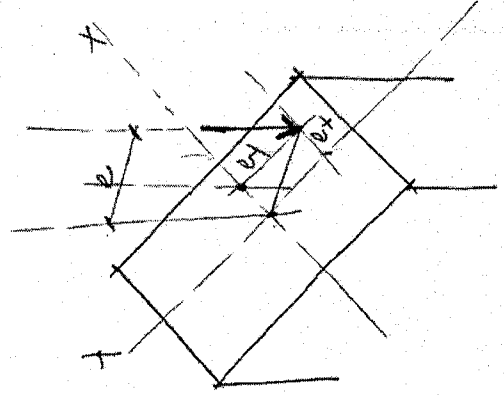
Per una sezione rettangolare, con $W = bh^2/6$, si ha un diagramma triangolare quando l'eccentricità è uguale a $h/6$.



Sotto, pressoflessione con centro di pressione comunque disposto

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{P}{A} \pm \frac{Pe_x}{W_y} \pm \frac{Pe_y}{W_x} \leq \sigma_{amm}$$

$e =$ eccentricità



Effetti delle sollecitazioni

N genera uno sforzo di **trazione** (o sforzo assiale); se fosse nell'altro senso sarebbe di compressione.

T genera una sollecitazione di **taglio** o scorrimento.

M_f rappresenta una sollecitazione di **flessione (semplice)**

M_t rappresenta una sollecitazione di torsione.

La presenza contemporanea di più di una sollecitazione semplice genera una sollecitazione composta.

Sollecitazioni semplici

Trazione (o compressione semplice) e taglio

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{amm} \quad \varepsilon = \text{allungamento unitario} = \Delta L/L = N/EA$$

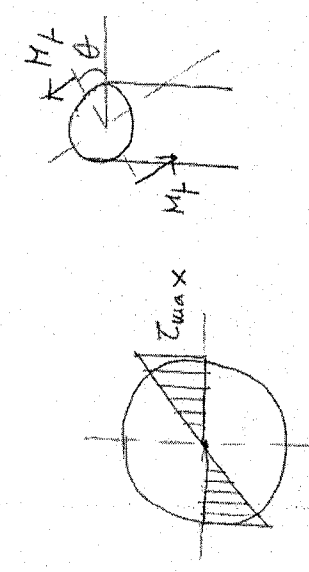
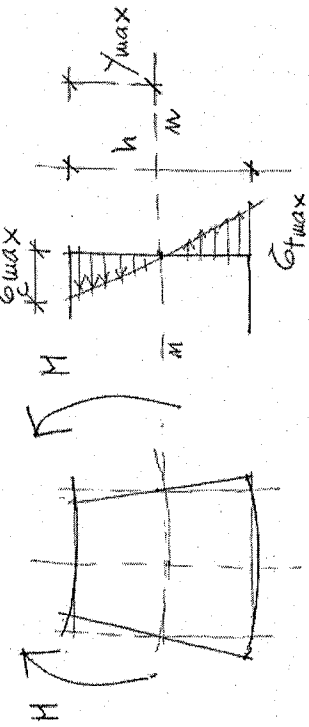
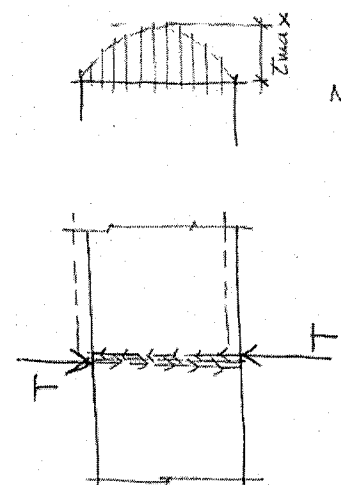
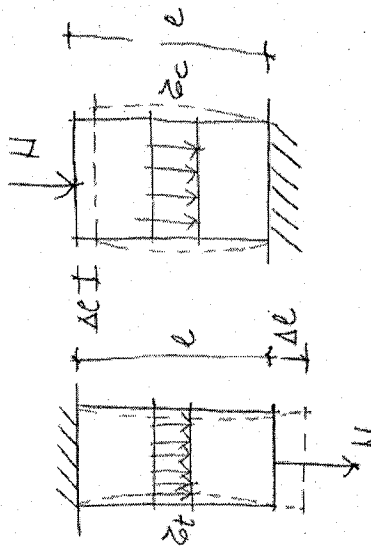
$$\tau = \frac{T}{A} \leq \tau_{amm} \quad \gamma = \text{scorrimento unitario} = \chi T/GA,$$

con

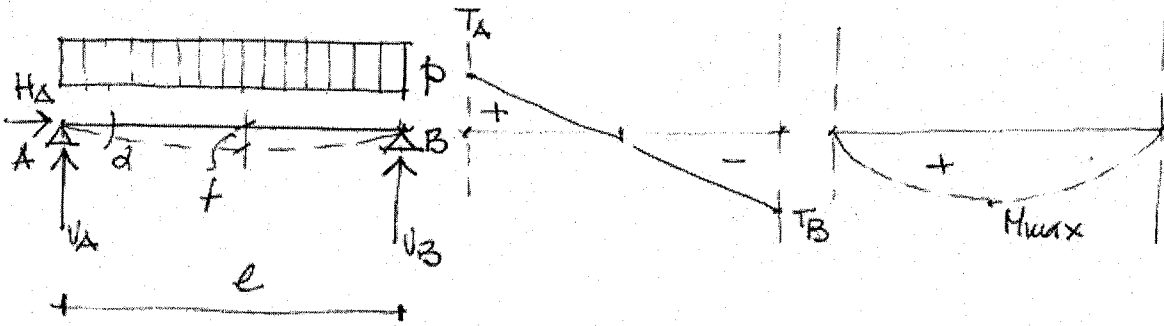
χ = fattore di taglio = 1,2 per sezione rettangolare),

G = modulo di elasticità tangenziale = $E/2(1+\nu)$,

ν = coeff. di Poisson



Carico distribuito



$$V_A = V_B = \frac{pl}{2}$$

$$H_A = 0$$

$$T_{A_{des}} = V_A = \frac{pl}{2}$$

$$T_B = -\frac{pl}{2}$$

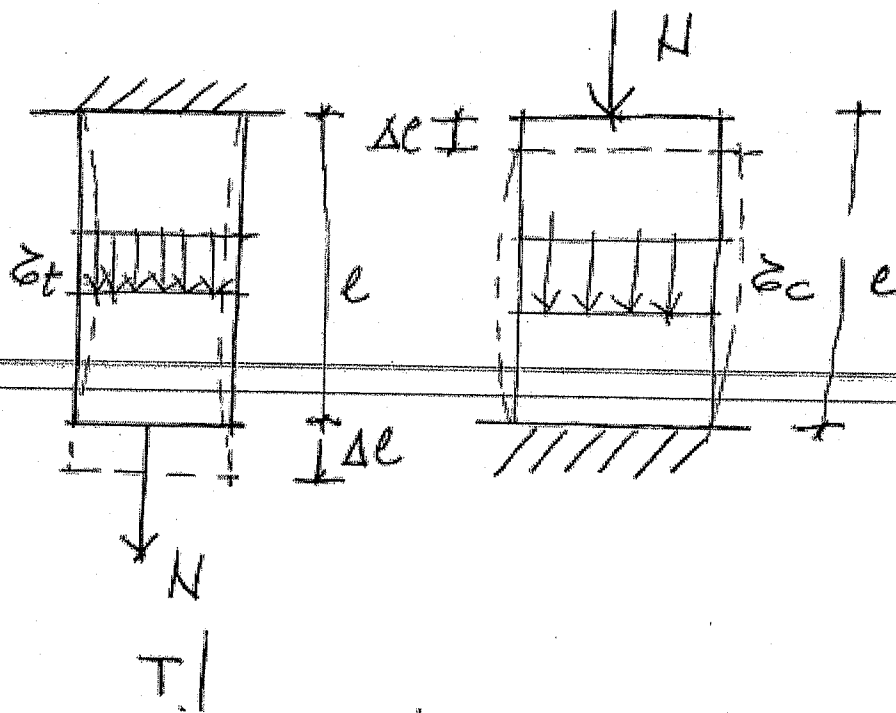
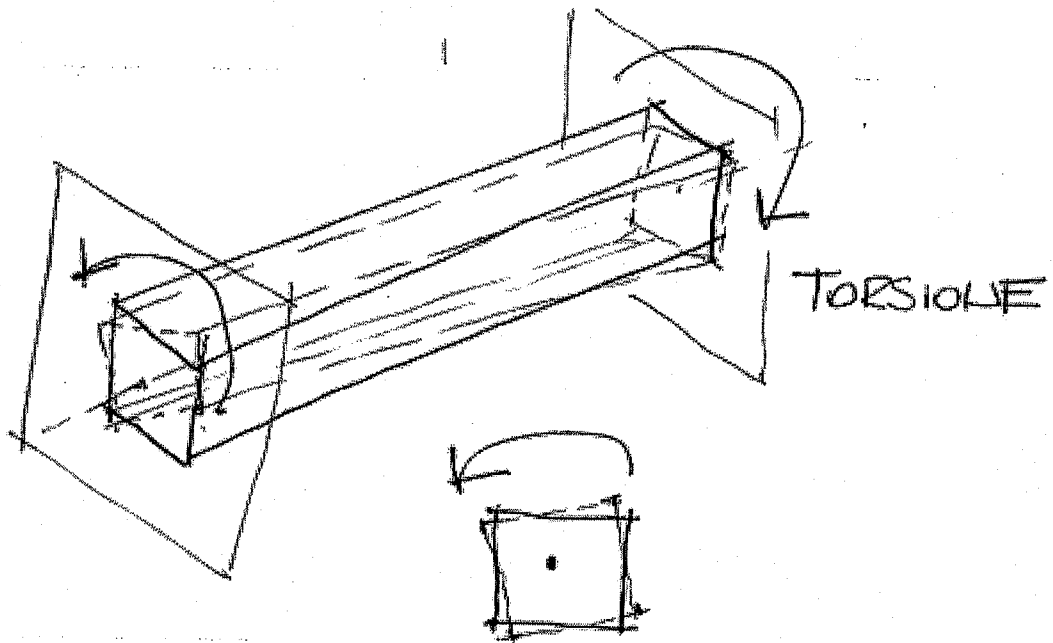
$$T_x = +\frac{pl}{2} - px$$

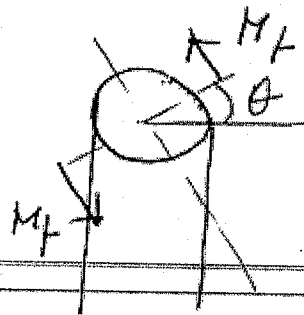
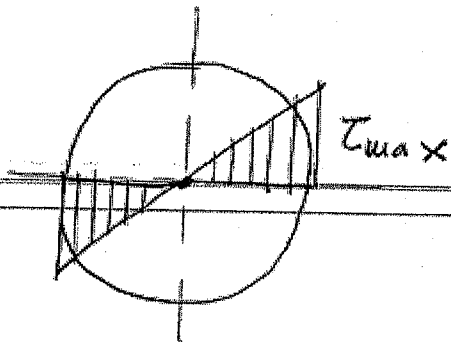
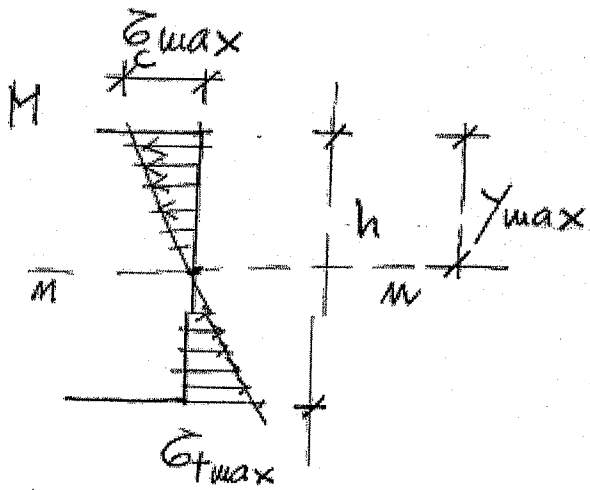
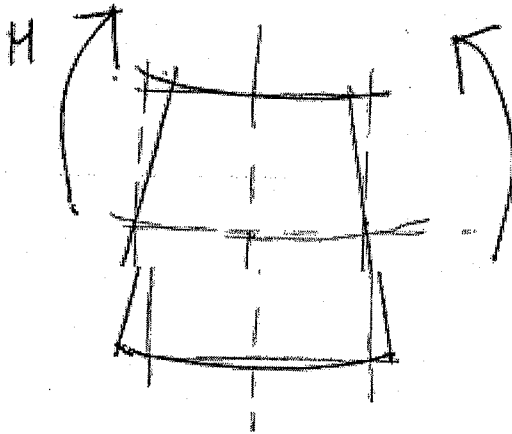
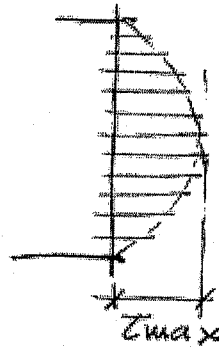
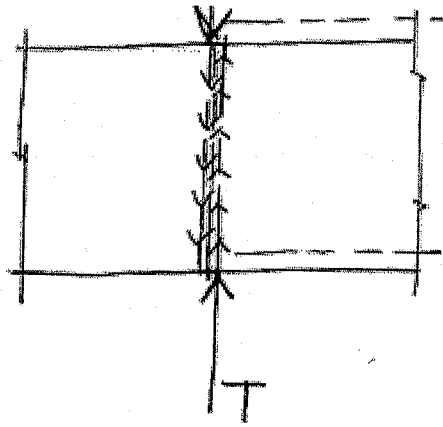
$$M_A = M_B = 0$$

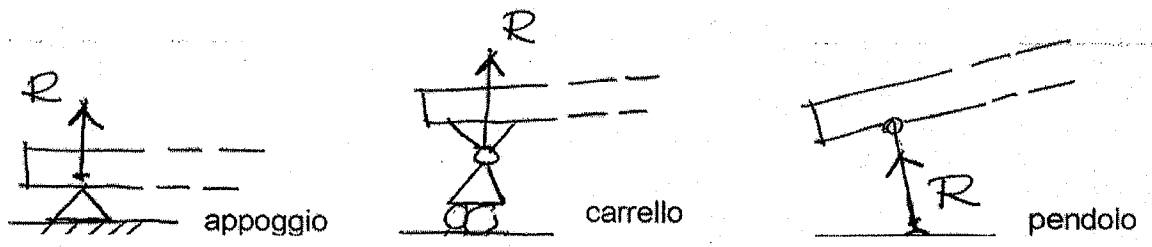
$$M_{\max} = +\frac{pl^2}{8}$$

$$f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}$$

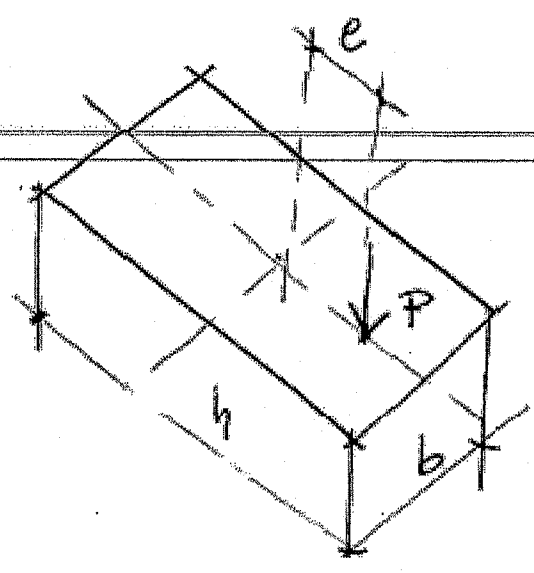
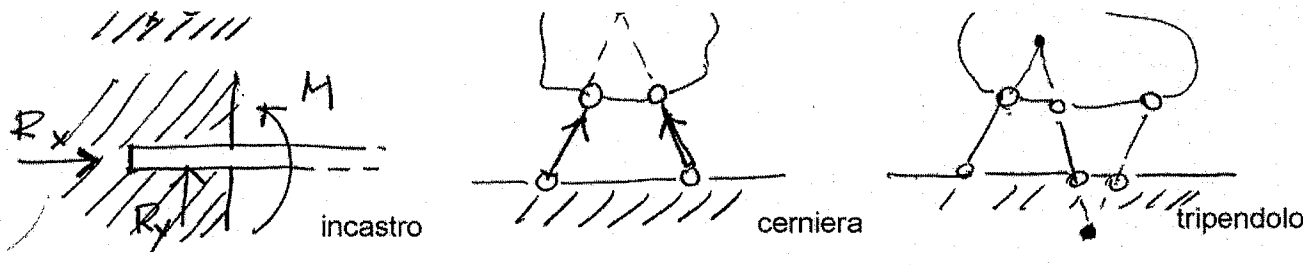
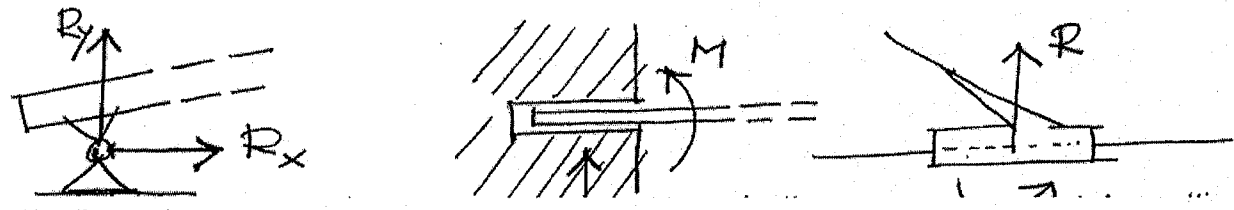
$$\alpha = \frac{pl^3}{24EJ}$$

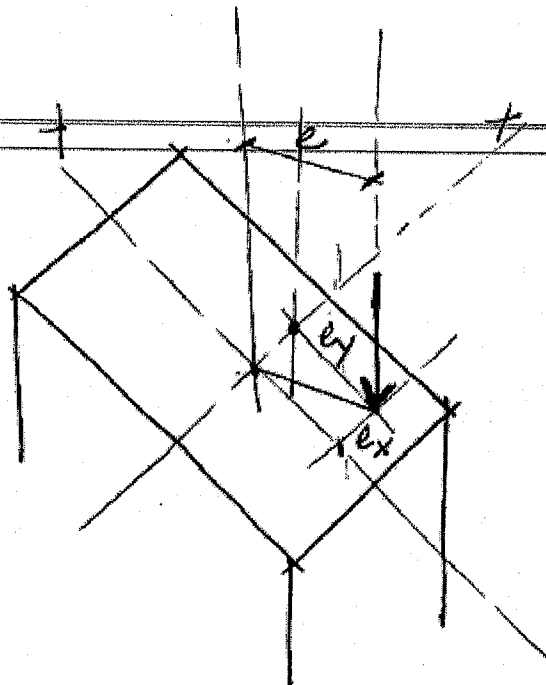
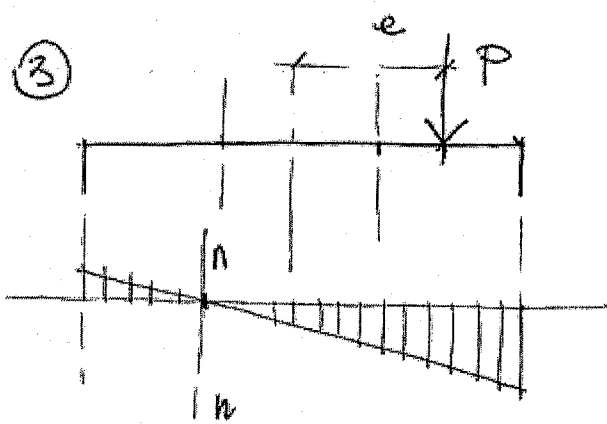
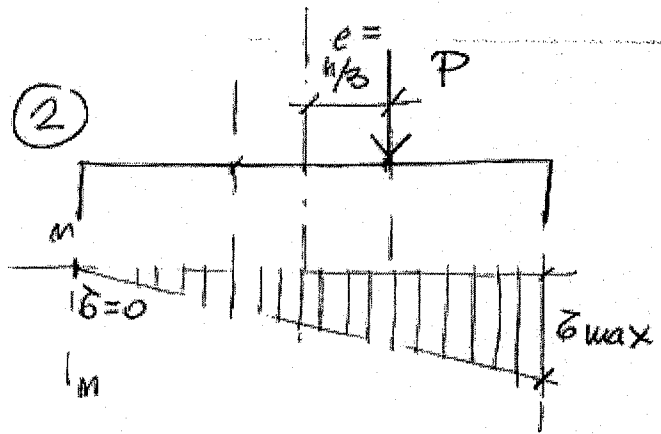
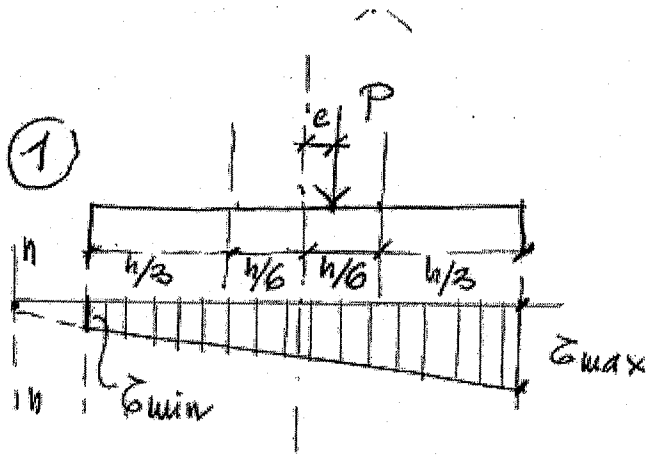




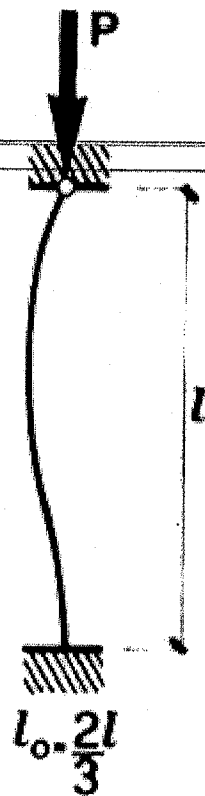
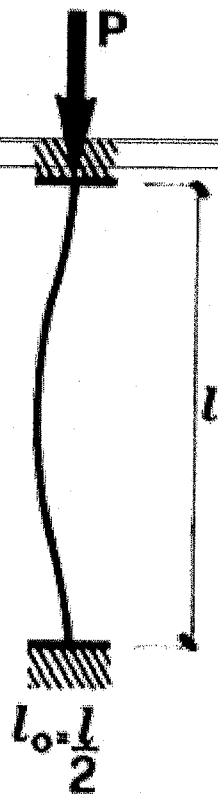
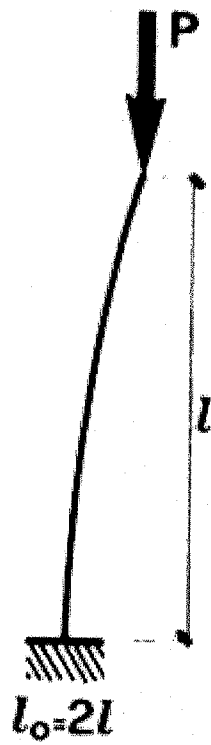
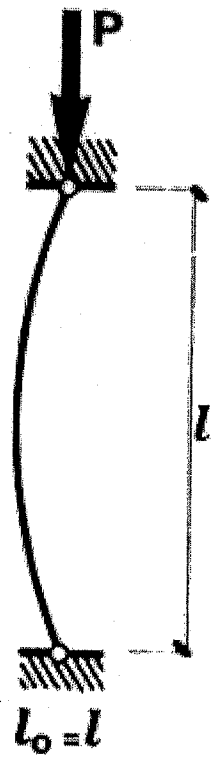


///// semplice // // // scorrevole





Solidi caricati di punta



I balconi appoggiati su mensole

Con un sistema costruttivo oggi in disuso, per l'impiego di nuovi metodi che garantiscono una maggiore sicurezza, nelle costruzioni realizzate sino a circa un secolo fa i balconi venivano ottenuti con una lastra di pietra di adeguato spessore, appoggiata su due o più mensole (dette *modiglioni*), sempre in pietra, incastrate nelle murature perimetrali portanti [fig. a], non essendo possibile prolungare all'esterno la struttura degli orizzontamenti, come attualmente viene fatto con i solai in c.a., essendo questi prevalentemente costituiti da volte e solo in alcuni casi da solai piani.

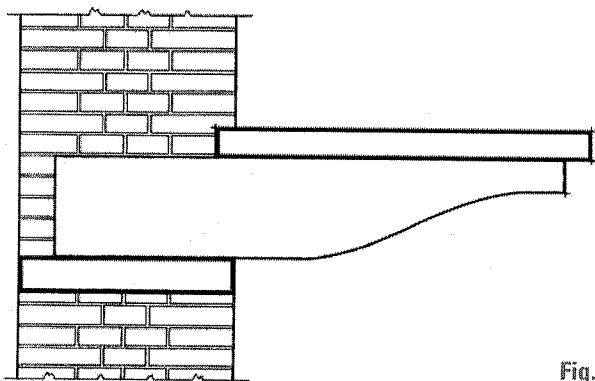


Fig. a

È opportuno comunque affrontare l'argomento in quanto, in caso di interventi su edifici nei centri storici, dovendo mantenere le caratteristiche architettoniche e strutturali esistenti, succede sovente di dover compiere verifiche statiche sull'esistente; in altri casi può invece accadere di dover realizzare nuovi balconi in edifici murari preesistenti (costruzioni in campagna o in montagna) al fine di adeguarli alle nuove esigenze.

In quest'ultimo caso il balcone viene ottenuto incastrandolo nella parete in muratura profilati in acciaio a doppio T, con interasse di $1,40 \div 1,60$ m, sui quali può essere realizzata una soletta massiccia in cemento armato [fig. b]. Al fine di un'ade-

guata ripartizione dei carichi sui muri, nel vano aperto nella muratura viene eseguito un cordolo, anche discontinuo, in c.a., mentre, ai fini della sicurezza al ribaltamento, le parti terminali delle mensole vengono collegate con un profilato HE ad ali larghe, sigillato alla muratura esistente con malta antiritiro, e quindi viene effettuata la chiusura del vano con muratura o calcestruzzo.

Con riferimento al balcone in pietra di figura c, per la sua verifica di stabilità si procede determinando dapprima lo schema statico e di carico, che generalmente è il seguente:

a) la lastra in pietra presenta lo schema statico di una trave su due appoggi, costituiti dalle mensole, e due sbalzi (oppure senza se le mensole sono disposte alle estremità), gravata di un carico ripartito, costituito dal peso proprio e dal carico di

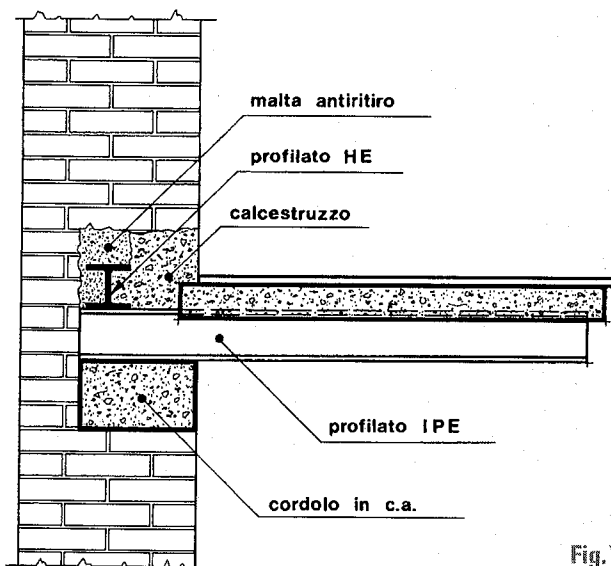


Fig. b

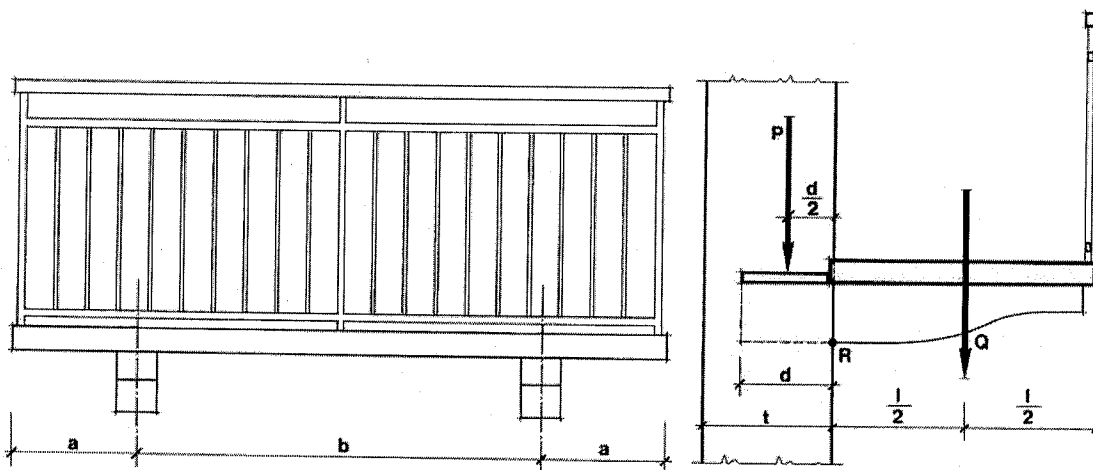


Fig. c

esercizio, e da due carichi concentrati alle estremità dovuti al peso della ringhiera nel senso trasversale;

b) ogni mensola è una trave a sbalzo soggetta al carico ripartito trasmesso dalla lastra, al peso proprio e a un carico concentrato alle estremità determinato dalla metà del peso della ringhiera nel senso longitudinale.

Si devono effettuare le seguenti verifiche:

1. *verifica di stabilità al ribaltamento*: consiste nel controllo che l'incastro sia in grado di contrastare efficacemente la rotazione della mensola attorno allo spigolo esterno R [fig. c], determinata dal momento M_i della mensola all'incastro:

$$M_i = Q \cdot \frac{l}{2}$$

al quale deve opporsi il momento di stabilità:

$$M_s = P \cdot \frac{d}{2}$$

essendo P il carico trasmesso dal muro, compreso il peso proprio, gravante sulla mensola; qualora la larghezza della mensola fosse insufficiente a questo scopo, su questa viene disposta una lastra in pietra al fine di aumentare la superficie di appoggio della muratura, e quindi il relativo peso gravante sulla mensola [fig. d]. La verifica di stabilità può ritenersi positiva quando risulta:

$$\frac{M_s}{M_i} \geq 1,5$$

2. *verifica delle tensioni determinate dalla mensola sulla muratura*: ammettendo una ripartizione triangolare delle tensioni indotte dalla mensola sulle murature, i loro valori massimi si verificano in corrispondenza delle estremità della parte incastrata nella muratura, sulle sezioni superiore e inferiore della muratura stessa rispetto alla mensola.

Non essendo possibile individuare uno schema statico preciso della mensola a causa della diversità fra i due materiali a contatto (in genere muratura e pietra), viene considerata l'ipotesi

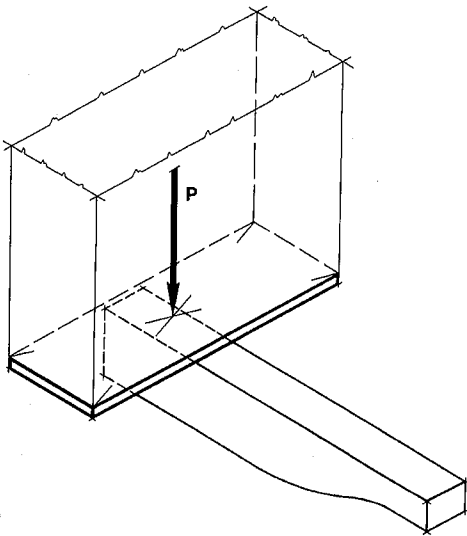


Fig. d

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

che risulta più gravosa, fornendo valori di tensioni che possono essere considerati massimi.

Per effettuare questa verifica si immagina di sostituire l'incastro con due appoggi contrapposti molto vicini, per cui la mensola viene così sostituita da una trave su due appoggi, in U e V [fig. e], e una mensola, della quale vengono calcolati le reazioni vincolari R_u ed R_v , i momenti flettenti M_u ed M_v e gli sforzi di taglio V_u e V_v .

In favore della sicurezza, in quanto si vengono così a determinare tensioni più gravose, i due appoggi fittizi contrapposti si pensano disposti a una distanza pari a $b/6$ dalle estremità della parte incastrata [fig. e] essendo b la lunghezza del tratto di mensola incastrato nel muro. Con questa ipotesi si considerano reagenti le sole sezioni triangolari di traccia AE , inferiore, e CF , superiore, per le quali gli assi neutri coincidono con i lati di traccia E ed F ; di conseguenza ogni sezione presenta un diagramma tensionale triangolare e quindi risulta totalmente compressa. In base alla teoria della presso-flessione,

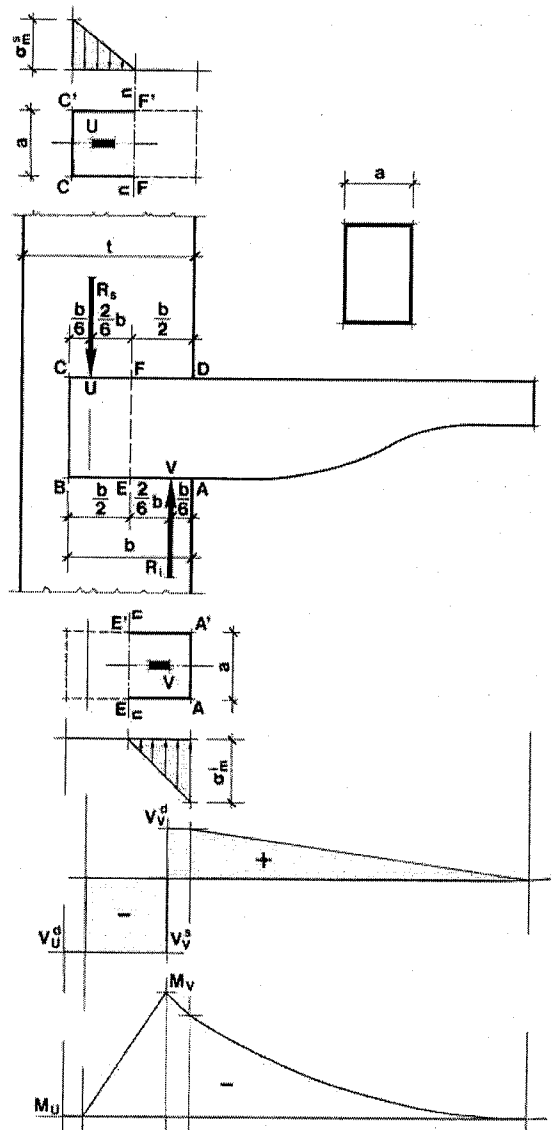


Fig. e

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

essendo ogni reazione R_s ed R_i applicata all'estremo del terzo medio delle due sezioni di traccia AE e CF , le tensioni massime alle estremità risultano [fig. f]:

$$\sigma_m^s = -\frac{2 \cdot R_s}{A} = -\frac{2 \cdot R_s}{\frac{b}{2} \cdot a}$$

ossia:

$$\sigma_m^s = -\frac{4 \cdot R_s}{b \cdot a}$$

e analogamente:

$$\sigma_m^i = -\frac{4 \cdot R_i}{b \cdot a}$$

essendo a la base della mensola.

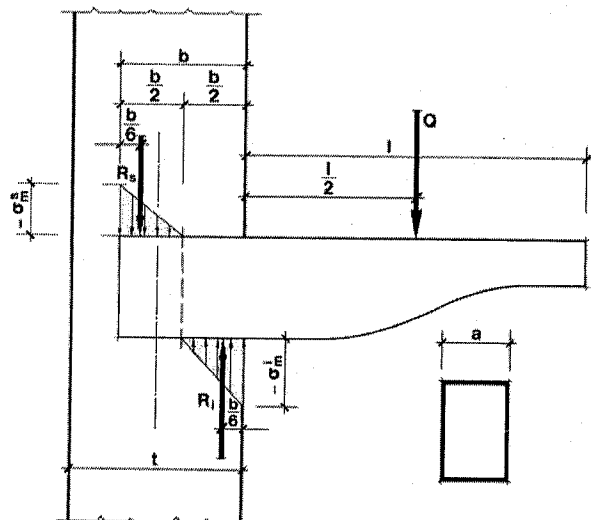


Fig. 7

Verificare la stabilità del balcone con mensole in pietra e soprastante lastrone, con le dimensioni riportate nelle figure a e b, estendendo la verifica al muro in cui sono incastrate le mensole, che è in mattoni pieni (resistenza caratteristica $f_{bk} = 20 \text{ N/mm}^2$) e malta M10.

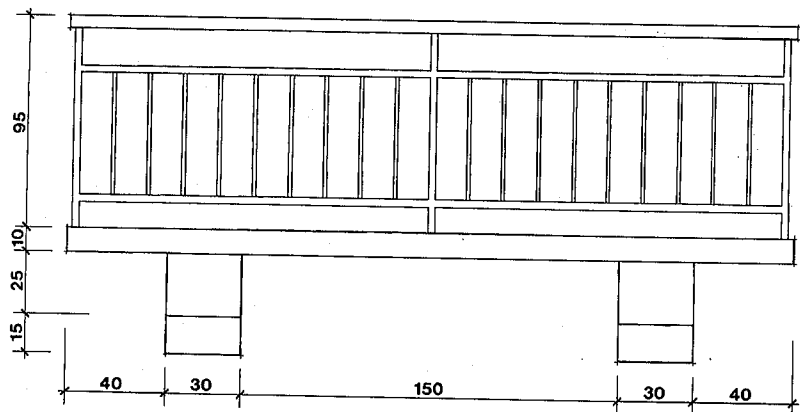


Fig. 8

Verifica del lastrone di pietra

Lo schema statico è quello di una trave su due appoggi e due sbalzi simmetrici; si assumono per la pietra le seguenti caratteristiche meccaniche:

- tensione ammissibile a flessione: $\bar{\sigma}_{fl} = 140 \text{ N/cm}^2$
- tensione ammissibile a taglio: $\bar{\tau} = 50 \text{ N/cm}^2$
- modulo elastico: $E = 50\,000 \times 10^2 \text{ N/cm}^2$
- peso volumico: $\gamma = 28 \text{ kN/m}^3$

L'analisi dei carichi viene effettuata per la lunghezza di 1,00 m e per la larghezza di 1,10 m.

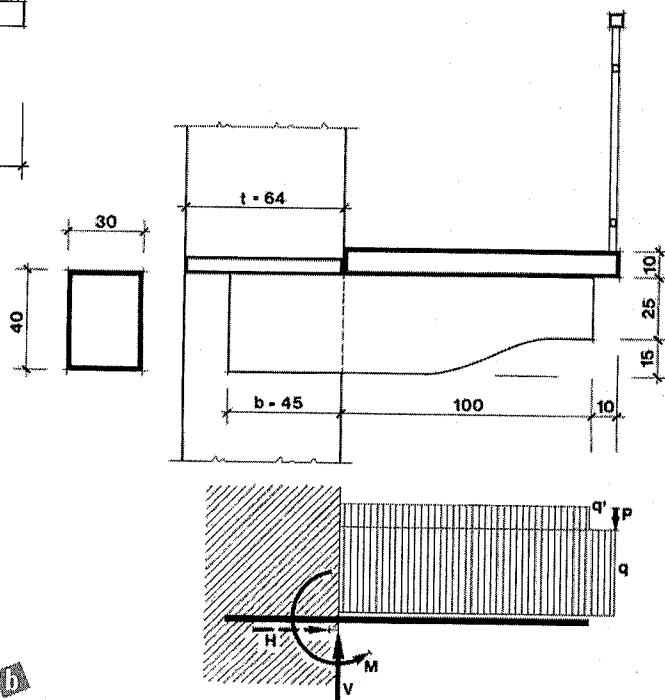


Fig. 9

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

Carico di esercizio:

$$p = 4,00 \text{ kN/m}^2 \times 1,10 \text{ m} = 4,40 \text{ kN/m}$$

Peso proprio del lastrone:

$$g = (1,00 \times 1,10 \times 0,10) \text{ m}^3/\text{m} \cdot 28 \text{ kN/m}^3 = 3,08 \text{ kN/m}$$

$$q = 7,48 \text{ kN/m}$$

Alle estremità agiscono inoltre due carichi concentrati P che rappresentano il peso della ringhiera trasversale, con valore $P = 0,36 \text{ kN/m} \cdot 1,10 \text{ m} \approx 0,40 \text{ kN}$ ($0,36 \text{ kN/m}$ è il peso medio di una ringhiera in ferro a bacchetta diritta).

1. Ipotesi di carico

Al fine di ricercare le massime sollecitazioni, vengono effettuate tre ipotesi di carico.

Prima ipotesi [fig. c]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times (2 \times 4,40 \times 0,55 + 3,08 \times 2,90 + 2 \times 0,40) \approx 7,29 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_D^s = -0,40 \text{ kN}$$

$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 7,48 \times 0,55 \approx -4,51 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -4,51 + 7,29 = 2,78 \text{ kN}$$

Lo sforzo di taglio si annulla, per la simmetria, anche nella sezione con ascissa

$$x = \frac{l}{2} = 0,90 \text{ m}$$

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 7,48 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -1,35 \text{ kNm}$$

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - g \cdot \frac{0,90^2}{2} = -1,35 + 2,78 \times 0,90 - 3,08 \times \frac{0,90^2}{2} = -0,10 \text{ kNm}$$

Seconda ipotesi [fig. d]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times (4,40 \times 1,80 + 3,08 \times 2,90 + 2 \times 0,40) \approx 8,83 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_D^s = -0,40 \text{ kN}$$

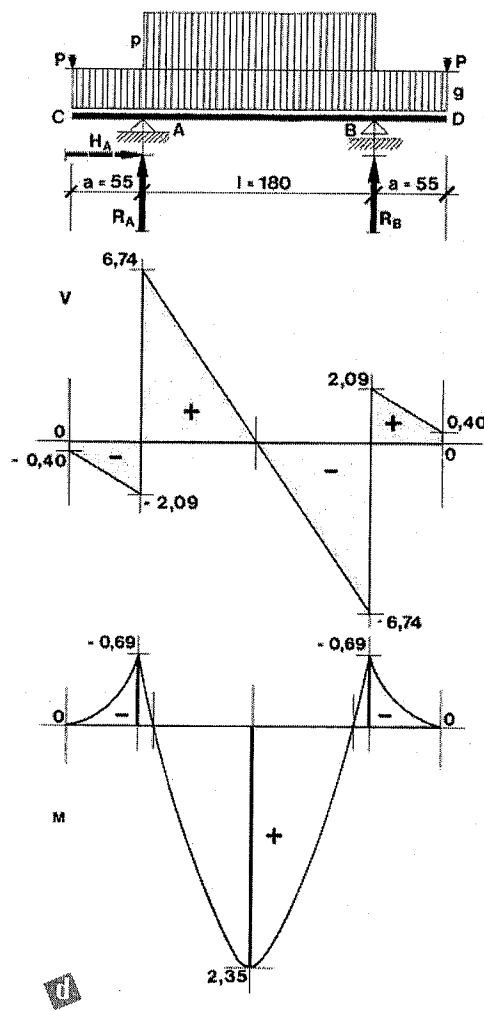
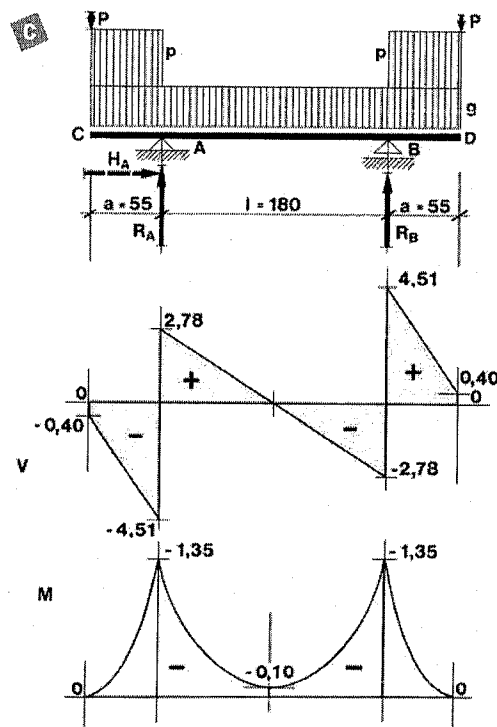
$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 3,08 \times 0,55 \approx -2,09 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -2,09 + 8,83 = 6,74 \text{ kN}$$

Per la simmetria lo sforzo di taglio si annulla anche nella sezione di mezzzeria.

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 3,08 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -0,69 \text{ kNm}$$



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - q \cdot \frac{0,90^2}{2} =$$

$$= -0,69 + 6,74 \times 0,90 - 7,48 \times \frac{0,90^2}{2} \approx 2,35 \text{ kN m}$$

Terza ipotesi [fig. e]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = 0,40 + \frac{7,48 \times 2,90}{2} \approx 11,25 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_B^s = -0,40 \text{ kN}$$

$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 7,48 \times 0,55 \approx -4,51 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -4,51 + 11,25 = 6,74 \text{ kN}$$

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 7,48 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -1,35 \text{ kN m}$$

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - q \cdot \frac{0,90^2}{2} =$$

$$= -1,35 + 6,74 \times 0,90 - 7,48 \times \frac{0,90^2}{2} \approx 1,69 \text{ kN m}$$

Lo sforzo massimo di taglio si ottiene nella seconda e nella terza ipotesi, con un valore $V = 6,74 \text{ kN}$, mentre il massimo momento flettente in valore assoluto si ottiene nella seconda ipotesi dove $M = 2,35 \text{ kN m}$; con questi valori vengono ora effettuate le verifiche.

2. Verifica a flessione

Il modulo di resistenza risulta:

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \times 110 \times 10^2 \approx 1833,33 \text{ cm}^3$$

e la tensione nella lastra di pietra vale:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{235000}{1833,33} \approx 128,18 \text{ N/cm}^2 < \bar{\sigma}_f$$

3. Verifica a taglio

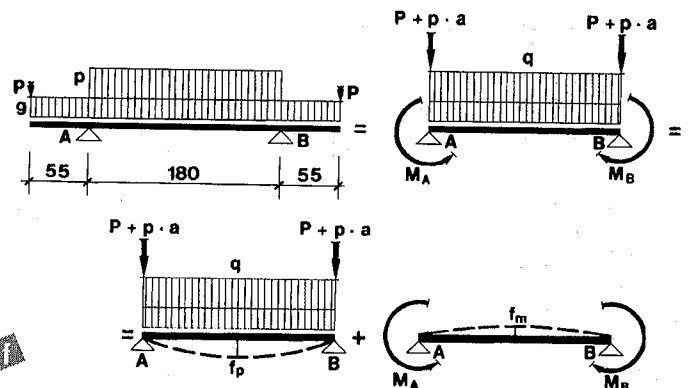
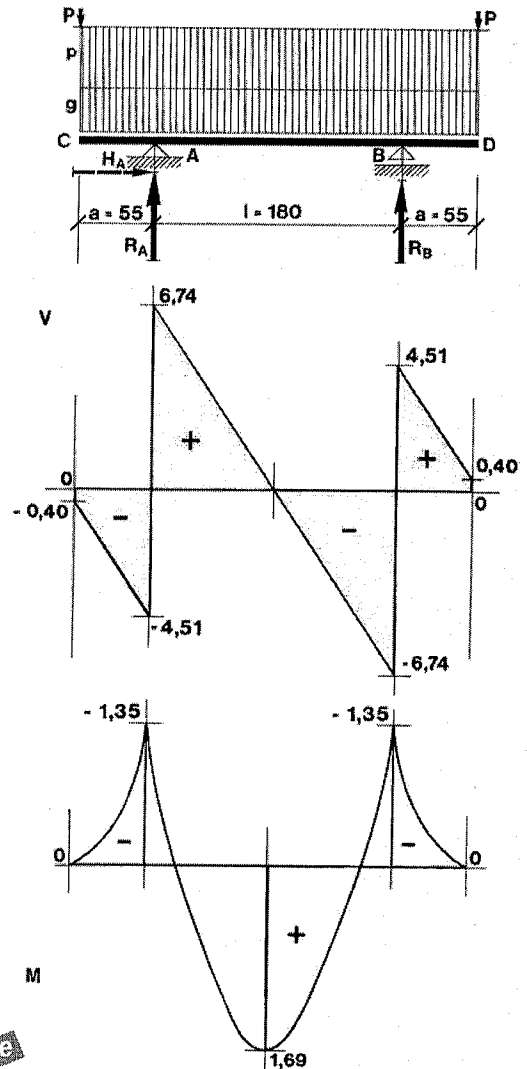
$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{6740}{110 \times 10} \approx 9,19 \text{ N/cm}^2 < \bar{\tau}$$

4. Verifica della deformazione

La massima deformazione si verifica con la seconda ipotesi di carico; la freccia teorica può essere calcolata applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, immaginando di sopprimere gli sbalzi e applicando in A e B alla trave così ottenuta i relativi momenti di incastro.

Freccia teorica [fig. f]:

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \times 110 \times 10^3 \approx 9166,67 \text{ cm}^4$$



$$f = f_p + f_m = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} + \frac{M_A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} =$$

$$= \frac{5}{384} \times \frac{74,80 \times 180^4}{50\,000 \times 10^2 \times 9166,67} - \frac{0,69 \times 10^5 \times 180^2}{8 \times 50\,000 \times 10^2 \times 9166,67} = 0,0223 - 0,0061 = 0,0162 \text{ cm}$$

Freccia ammissibile:

$$f_{am} = \frac{1}{500} \cdot l = \frac{1}{500} \times 180 = 0,36 \text{ cm} > f$$

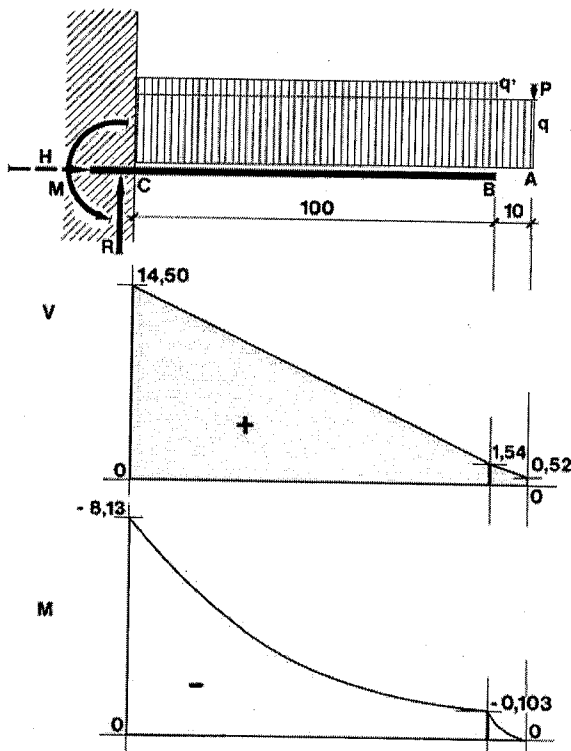
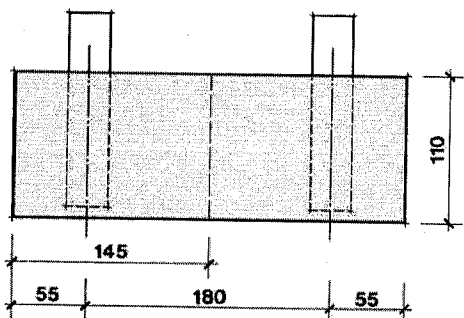
Le risorse elastiche della pietra sono molto limitate e per questo motivo la freccia teorica è molto ridotta e tale deve sempre essere, anche considerando che la pietra presenta una rottura fragile, passando cioè alla rottura senza apprezzabili deformazioni plastiche.

Verifica di una mensola in pietra

1. Analisi dei carichi

- Carico ripartito uniforme trasmesso dalla lastra di pietra, corrispondente alla reazione vincolare con intensità di 11,25 kN agente sulla lunghezza $l = 1,10 \text{ m}$ [fig. g]:

$$q = \frac{11,25}{1,10} \approx 10,23 \text{ kN/m}$$



- Carico ripartito uniforme dovuto al peso proprio [fig. h] (la sezione viene assimilata a un trapezio):

$$q' = \left(\frac{0,25 + 0,40}{2} \times 0,30 \times 1,00 \right) \text{ m}^3/\text{m} \times$$

$$\times 28,00 \text{ kN/m}^3 = 2,73 \text{ kN/m}$$

- Carico concentrato applicato all'estremità della lastra rappresentato dal peso della ringhiera:

$$P = 0,36 \text{ kN/m} \cdot 1,45 \text{ m} \approx 0,52 \text{ kN}$$

Lo schema strutturale e di carico è riportato in figura h.

2. Calcolo delle sollecitazioni

Reazione vincolare

$$R = 10,23 \times 1,10 + 2,73 \times 1,00 + 0,52 \approx 14,50 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = 14,50 \text{ kN}$$

$$V_B = 14,50 - (10,23 + 2,73) \times 1,00 = 1,54 \text{ kN}$$

$$V_A^s = 1,54 - 10,23 \times 0,10 \approx 0,52 \text{ kN}$$

Sollecitazione di momento flettente

$$M_B = -0,52 \times 0,10 - 10,23 \times \frac{0,10^2}{2} = -0,103 \text{ kNm}$$

$$M_C = -0,52 \times 1,10 - 10,23 \times \frac{1,10^2}{2} - 2,73 \times \frac{1,00^2}{2} =$$

$$= -8,13 \text{ kNm}$$

La verifica viene effettuata nella sezione di incastro che è la più sollecitata.

3. Verifica a flessione

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \times 30 \times 40^2 = 8000 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_f = \frac{M}{W} = \frac{8,13 \times 10^5}{8000} = 101,63 \text{ N/cm}^2 < \bar{\sigma}_f = 140 \text{ N/cm}^2$$

4. Verifica a taglio

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{14500}{30 \times 40} \approx 18,13 \text{ N/cm}^2 < \bar{\tau} = 50 \text{ N/cm}^2$$

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

Verifica del muro

Per l'azione del momento di incastro ($M = -8,13 \text{ kNm}$), la mensola in pietra tende a ruotare in modo rigido attorno al punto C, e a tale rotazione deve opporsi il momento calcolato rispetto allo stesso punto, prodotto dalla massa muraria gravante sulla mensola [fig. 1]. Supponendo un'altezza di piano di 5,00 m e trascurando il carico trasmesso dai solai per la loro limitata incidenza, data la superficie in pianta molto ridotta della mensola, la sezione del prisma di muro occorrente per la stabilità e che grava sulla lastra di pietra disposta sopra la mensola, risulta:

$$A = 0,64 \cdot x$$

con un peso:

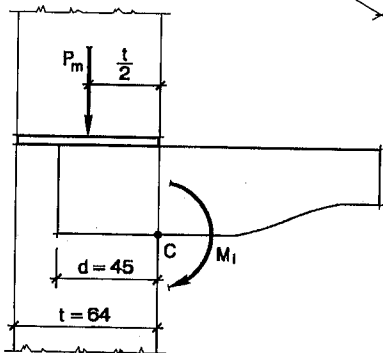
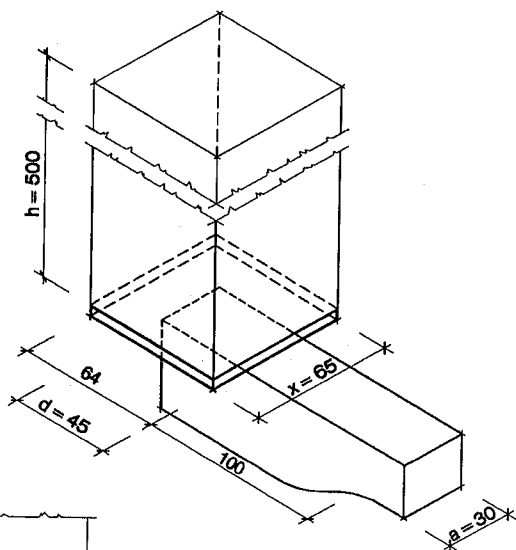
$$P_m = A \cdot h \cdot \gamma_m = (0,64 \cdot x \cdot 5,00) \text{ m}^3 \cdot 19,00 \text{ kN/m}^3 = (60,80 \cdot x) \text{ kN}$$

avendo assunto, per le caratteristiche della muratura, un peso volumico con valore $\gamma_m = 19,00 \text{ kN/m}^3$; il relativo momento M_s vale:

$$M_s = P_m \cdot \frac{t}{2} = 60,80 \cdot x \cdot 0,32 \approx (19,46 \cdot x) \text{ kNm}$$

Per la stabilità al ribaltamento è necessario che si abbia almeno un coefficiente di sicurezza 1,5, ossia:

$$\frac{M_s}{M_i} \geq 1,5$$



essendo M_i il momento di incastro (cioè il momento ribaltante) ed M_s il momento di stabilità; si ottiene quindi:

$$\frac{19460 \cdot x}{8130} = 1,5$$

e quindi:

$$x = \frac{8130 \times 1,5}{19460} \approx 0,63 \text{ m} \approx 0,65 \text{ m}$$

È necessario ora determinare le tensioni che si producono sulle facce superiore e inferiore della parte incastrata della mensola.

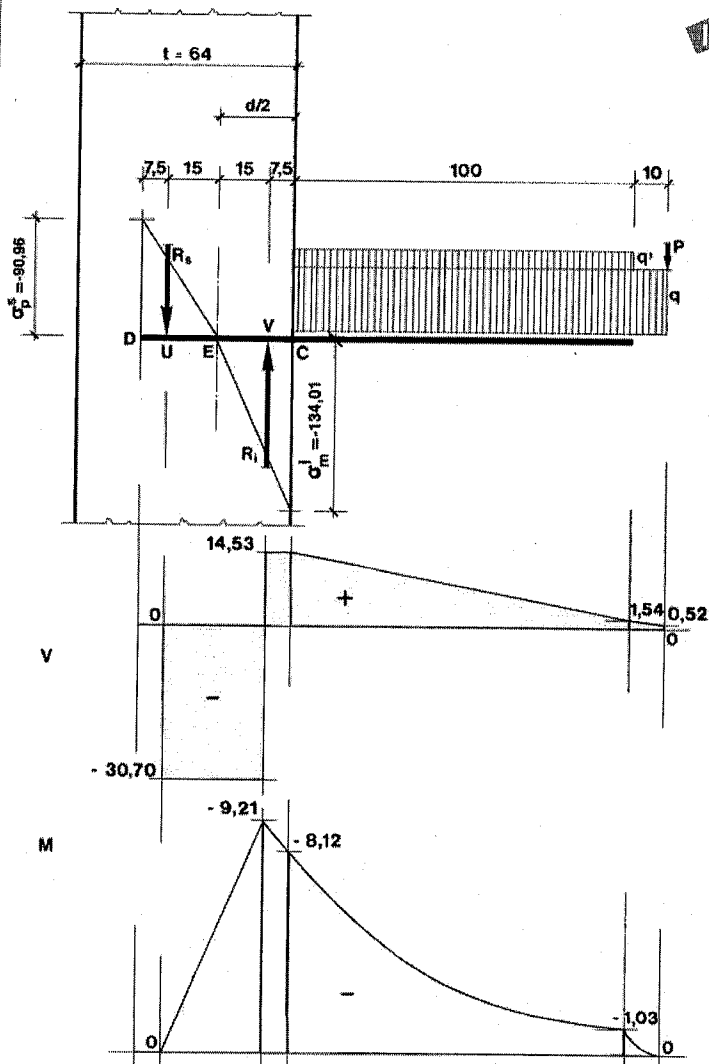
Si ipotizza quindi di sostituire l'incastro con due appoggi fittizi contrapposti a distanza $d/6 = 45/6 = 7,5 \text{ cm}$ dalle estremità della parte incastrata, per cui la mensola viene sostituita in tale modo con una trave sui due appoggi in U e V e una mensola; le reazioni di appoggio valgono [fig. 1]:

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-R_s + R_i - q' \cdot 1,00 - q \cdot 1,10 - P = 0$$

$$-R_s + R_i - 2,73 \times 1,00 - 10,23 \times 1,10 - 0,52 = 0$$

$$-R_s + R_i \approx 14,50 \text{ kN}$$



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

$$\Sigma M_v = 0$$

$$+ R_s \cdot 0,30 + q' \cdot 1,00 \times \left(\frac{1,00}{2} + 0,075 \right) + q \cdot 1,10 \times \left(\frac{1,10}{2} + 0,075 \right) + P \cdot (1,10 + 0,075) = 0$$

$$R_s = - \frac{2,73 \times 1,00 \times 0,575 + 10,23 \times 1,10 \times 0,625 + 0,52 \times 1,175}{0,30} \approx -30,70 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_u = 0$$

$$- R_i \cdot 0,30 + q' \cdot 1,00 \times \left(\frac{1,00}{2} + 0,375 \right) + q \cdot 1,10 \times \left(\frac{1,10}{2} + 0,375 \right) + P \cdot (1,10 + 0,375) = 0$$

$$R_i = \frac{2,73 \times 1,00 \times 0,875 + 10,23 \times 1,10 \times 0,925 + 0,52 \times 1,475}{0,30} \approx 45,23 \text{ kN}$$

Verifica

$$R_s + R_i = -30,70 + 45,23 = 14,53 \text{ kN} \approx 14,50 \text{ kN}$$

Vengono ora calcolati i momenti flettenti:

$$M_u = 0$$

$$M_v = R_s \cdot 0,30 = -30,70 \times 0,30 = -9,21 \text{ kNm}$$

$$M_c = R_s \cdot 0,375 + R_i \cdot 0,075 = -30,70 \times 0,375 + 45,23 \times 0,075 \approx -8,12 \text{ kNm}$$

valore quest'ultimo praticamente uguale al momento di incastro della mensola prima calcolato.

Gli sforzi di taglio valgono:

$$V_u^d = R_s = -30,70 \text{ kN}$$

$$V_v^s = V_u^d = -30,70 \text{ kN}$$

$$V_v^d = V_v^s + R_i = -30,70 + 45,23 = 14,53 \text{ kN}$$

$$V_c = V_v^d = 14,53 \text{ kN}$$

Quest'ultimo valore corrisponde praticamente allo sforzo di taglio prima calcolato.

Le reazioni R_u ed R_v , cambiate di verso, rappresentano le risultanti delle tensioni di compressione, con variazione trian-

golare, che si verificano sulle superfici superiore e inferiore della parte incastrata della mensola, rispettivamente di traccia DE ed EC ; poiché tali risultanti coincidono con l'estremo del terzo medio delle relative sezioni, queste ultime risultano totalmente compresse e le relative tensioni hanno il valore qui di seguito calcolato.

Superficie superiore

Viene calcolata la tensione massima trasmessa dalla mensola alla lastra di pietra sovrastante:

$$\sigma_p^s = - \frac{2 \cdot R_s}{d \cdot a} = - \frac{4 \cdot R_s}{d \cdot a} = - \frac{4 \times 30700}{45 \times 30} \approx -90,96 \text{ N/cm}^2 \approx -0,91 \text{ N/mm}^2$$

valore inferiore alla tensione ammissibile per compressione della pietra pari a circa 2 N/mm^2 .

Superficie inferiore

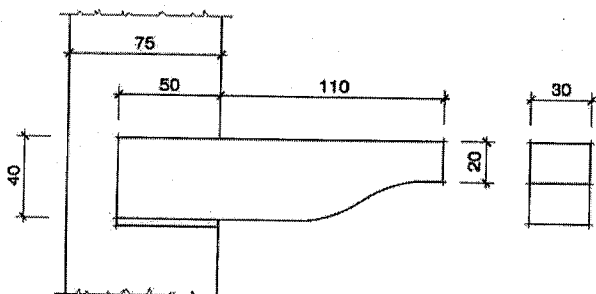
$$\sigma_m^i = - \frac{4 \cdot R_i}{d \cdot a} = - \frac{4 \times 45230}{45 \times 30} \approx -134,01 \text{ N/cm}^2 \approx -1,34 \text{ N/mm}^2 < \bar{\sigma}_m = \frac{f_k}{5} = \frac{8,0}{5} = 1,6 \text{ N/mm}^2$$

ESERCIZIO

I balconi appoggiati su mensole

Determinare le tensioni prodotte sulla muratura dal modiglione in pietra di un balcone con le caratteristiche geometriche riportate in figura che deve sopportare il carico $q = 15 \text{ kN/m}$ compreso il peso proprio.

Verificare inoltre l'eventuale necessità di disporre sotto il modiglione, in corrispondenza dell'incastro, un elemento di ripartizione della tensione. Assumere $\bar{\sigma}_m = -1,00 \text{ N/mm}^2$.



[tensione superiore $\sigma_m^s \approx 0,83 \text{ N/mm}^2$,
tensione inferiore $\sigma_m^i \approx 1,27 \text{ N/mm}^2$
È necessario disporre sotto la mensola
una lastra di ripartizione di $50 \times 50 \text{ cm}^2$
per cui la tensione
sulla muratura risulta $\sigma_m^i \approx 0,77 \text{ N/mm}^2$]

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

Carico di esercizio:

$$p = 4,00 \text{ kN/m}^2 \times 1,10 \text{ m} = 4,40 \text{ kN/m}$$

Peso proprio del lastrone:

$$g = (1,00 \times 1,10 \times 0,10) \text{ m}^3/\text{m} \cdot 28 \text{ kN/m}^3 = 3,08 \text{ kN/m}$$

$$q = 7,48 \text{ kN/m}$$

Alle estremità agiscono inoltre due carichi concentrati P che rappresentano il peso della ringhiera trasversale, con valore $P = 0,36 \text{ kN/m} \cdot 1,10 \text{ m} \approx 0,40 \text{ kN}$ ($0,36 \text{ kN/m}$ è il peso medio di una ringhiera in ferro a bacchetta dritta).

1. Ipotesi di carico

Al fine di ricercare le massime sollecitazioni, vengono effettuate tre ipotesi di carico.

Prima ipotesi [fig. c]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times (2 \times 4,40 \times 0,55 + 3,08 \times 2,90 + 2 \times 0,40) \approx 7,29 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_B^s = -0,40 \text{ kN}$$

$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 7,48 \times 0,55 \approx -4,51 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -4,51 + 7,29 = 2,78 \text{ kN}$$

Lo sforzo di taglio si annulla, per la simmetria, anche nella sezione con ascissa

$$x = \frac{l}{2} = 0,90 \text{ m}$$

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 7,48 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -1,35 \text{ kN m}$$

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - g \cdot \frac{0,90^2}{2} =$$

$$= -1,35 + 2,78 \times 0,90 - 3,08 \times \frac{0,90^2}{2} = -0,10 \text{ kN m}$$

Seconda ipotesi [fig. d]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times (4,40 \times 1,80 + 3,08 \times 2,90 + 2 \times 0,40) \approx 8,83 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_D^s = -0,40 \text{ kN}$$

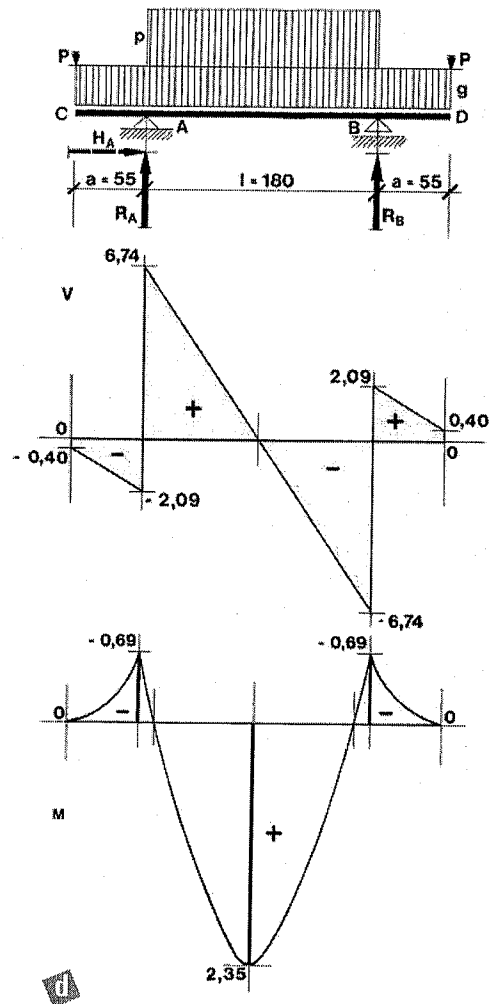
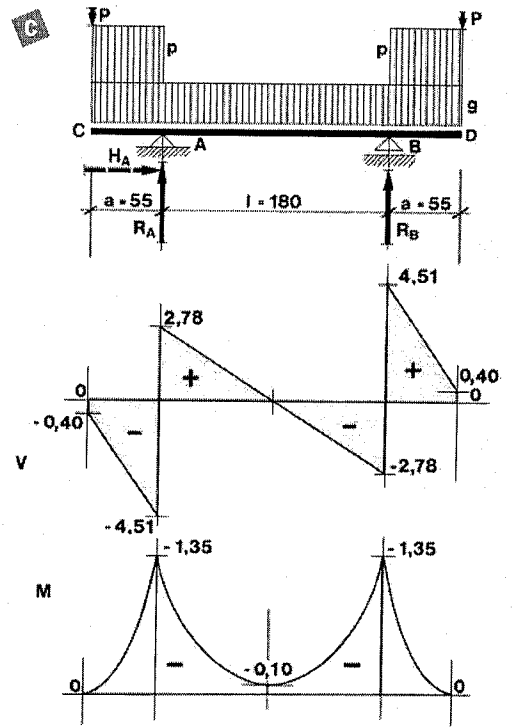
$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 3,08 \times 0,55 \approx -2,09 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -2,09 + 8,83 = 6,74 \text{ kN}$$

Per la simmetria lo sforzo di taglio si annulla anche nella sezione di mezzzeria.

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 3,08 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -0,69 \text{ kN m}$$



Diagrammi di sollecitazione

Fissato un sistema di riferimento ortogonale con l'asse delle ascisse coincidente con l'orizzontale, si riportano sulle ordinate le funzioni di N (sforzo normale), di T (taglio), ed M (momento flettente), in una scala di riferimento arbitraria, ottenendo i diagrammi di sollecitazione. Tali diagrammi sono in genere funzioni discontinue e si ottengono facendo la risultante relativa ad una sezione generica distante x dall'origine.

Studiando ad esempio la trave in fig. 4.

Le reazioni vincolari ($R_a = R_b = F/2$) sono verticali come il carico F e quindi è assente lo sforzo normale. Per quello che riguarda il taglio, esso sarà costante nel tratto AC (C è il punto di applicazione della forza agente, e sarà positivo per le convenzioni fatte sul segno di T). Nel tratto successivo esso sarà pure costante perché la risultante relativa alle sezioni comprese tra C e B ha sempre come componente verticale $F/2 - F = -F/2$ (fig. 5).

Le funzioni del taglio sono dunque $T_x = F/2$ nel tratto AC e $T_x = -F/2$ in CB .

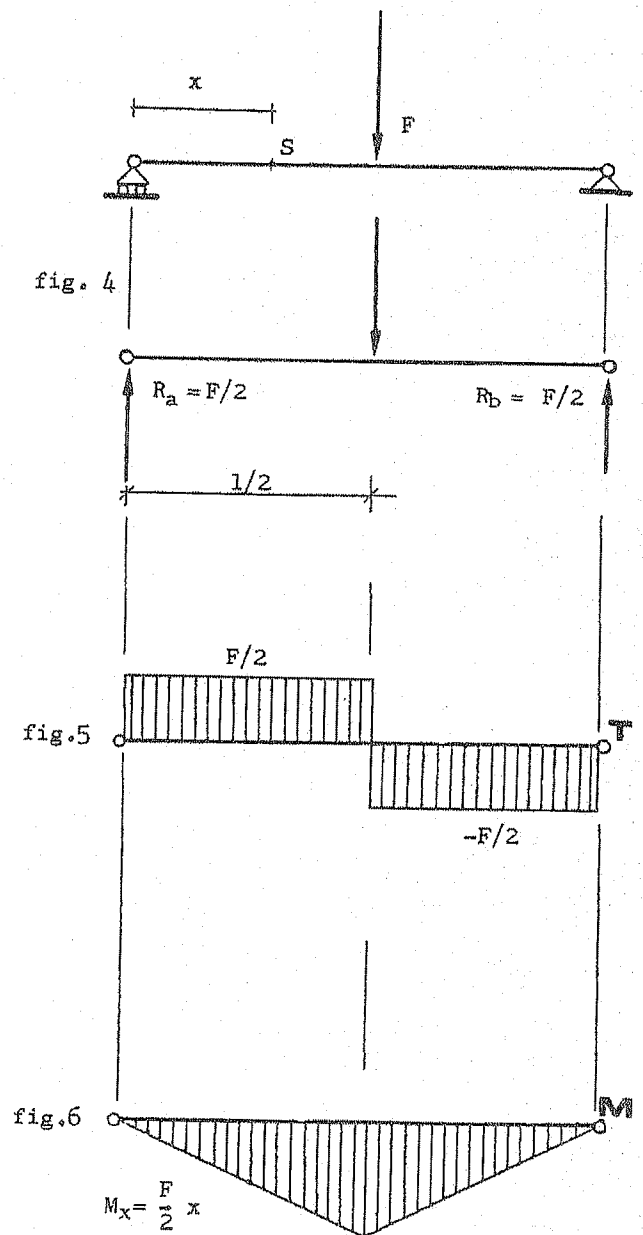
Scriviamo ora la funzione del momento flettente nel tratto AC . Se facciamo il momento rispetto ad una generica sezione S distante x da A , avremo (fig. 6)

$$M_s = F/2 \cdot x$$

Il diagramma è cioè costituito da una retta passante per A e di coefficiente angolare $F/2$. Il riferimento questa volta ha la direzione positiva delle ordinate verso il basso, perché il diagramma va disegnato dalla parte delle fibre tese. Nel tratto successivo il momento varrà

$$M_s = F/2 \cdot x - F(x - 1/2)$$

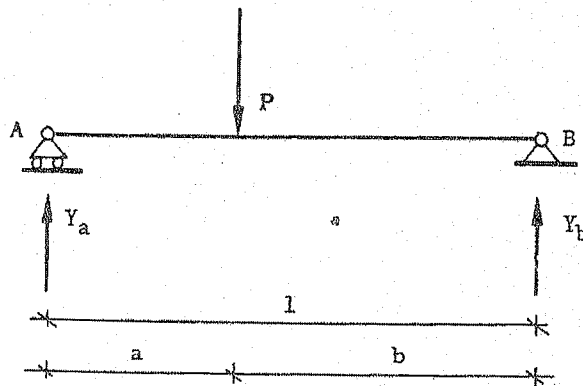
perché anche la forza F applicata in C da contributo al momento.



Esercizio 1

Si vogliono trovare le reazioni vincolari R_a (di componenti Y_a e X_a) e R_b (di componenti Y_b e X_b) e i diagrammi delle sollecitazioni per una trave vincolata in A da un carrello e in B da una cerniera, e sollecitata da una forza verticale P .

La trave è isostatica perché il numero dei vincoli è strettamente sufficiente a impedire qualsiasi traslazione o rotazione.



REAZIONI VINCOLARI

Dalle equazioni di equilibrio si ricava

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma X = 0 \text{ da cui } X_b = 0 \\ \Sigma Y = 0 \text{ da cui } Y_a + Y_b - P = 0 \\ \Sigma M = 0; M_b = 0 \text{ da cui } Y_a \cdot l - P_b = 0 \quad (1) \end{array} \right. \quad (\text{Calcolando i momenti rispetto a } B)$$

Dall'ultima equazione si ricava $Y_a = \frac{Pb}{l}$, e sostituendo nella seconda si ha $Y_b + \frac{Pb}{l} - P = 0$ da cui $Y_b = P - \frac{Pb}{l} = \frac{P(l-b)}{l}$ e poiché $l-b = a$ si ha $Y_b = \frac{Pa}{l}$. Poiché, essendo il carico P verticale, le reazioni saranno a loro volta verticali, si avrà:

$$R_a = Y_a = \frac{Pb}{l}$$

$$R_b = Y_b = \frac{Pa}{l}$$

Che sono i risultati cercati.

Bisogna ora determinare i diagrammi delle sollecitazioni.

(1) Avendo assunto come positiva la rotazione destrogira.

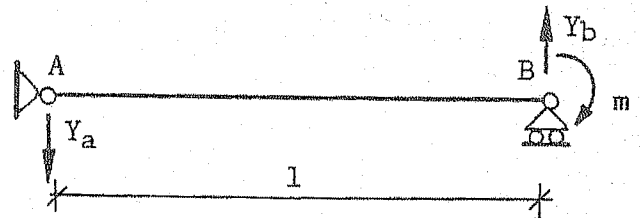
$R = R_b$ mentre x rappresenta la distanza di S da B . Il M_f varia quindi con legge lineare e assume valore massimo in C . Basta quindi calcolare il momento nel punto C .

$$R_a \cdot a = \frac{Pab}{l} = R_b \cdot b$$

Si nota dal diagramma che il momento (positivo) è tutto nella parte inferiore, sono cioè tese le fibre inferiori della trave, come si può intuitivamente dedurre dalla deformazione che P tende a provocare.

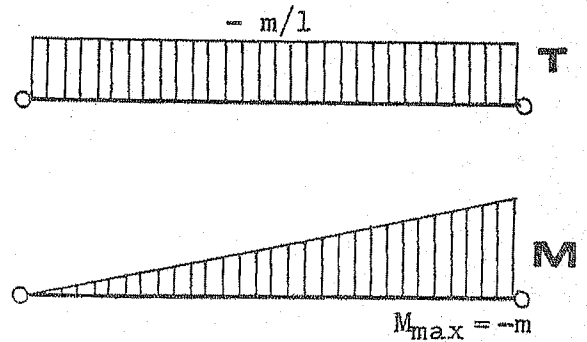
Esercizio 2

Calcolare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni in una trave vincolata in A da una cerniera e in B da un appoggio semplice, e sollecitata da una coppia di momento m .



REAZIONI VINCOLARI

Poiché la coppia di momento m tende ad imprimere alla trave una rotazione destrogira si nota intuitivamente che le reazioni dovranno imprimere alla trave una rotazione levogira che equilibri la precedente, cioè una coppia di braccio l e formata da vettori di direzione ortogonale alla trave (perché il carrello B può reagire solo con reazioni normali al piano d'appoggio). Bisogna ora verificare queste considerazioni intuitive con le equazioni di equilibrio e determinare i valori di R_a e R_b .



$$\begin{array}{l|l|l} \Sigma X = 0 & \Sigma M_a = 0 & \Sigma Y = 0 \\ X_a = 0 & m - Y_b l = 0 \quad (1) & Y_b - Y_a = 0 \\ \text{(non esiste)} & Y_b = \frac{m}{l} & Y_a = \frac{m}{l} \\ \text{sforzo normale)} & & \end{array}$$

TAGLIO

Poiché entrambe le reazioni hanno uguale valore $\frac{m}{l}$, direzione ortogonale alla trave, verso opposto, non intervenendo altre forze oltre la coppia, il valore del taglio sarà costante lungo tutta la trave e varrà $-\frac{m}{l}$ (negativo per le convenzioni accennate).

(1) Avendo assunto come positivo il verso di m .

MOMENTO FLETTENTE

Il momento flettente in una generica sezione S vale:

$$M_s = Y_a \cdot x = - \frac{m}{l} x \quad (\text{dove } x \text{ rappresenta la distanza } \overline{AS})$$

La legge di variazione del M_f è lineare lungo tutta la trave, e il momento sarà massimo nella sezione B dove varrà:

$$M_b = - \frac{m}{l} x = -m \quad (\text{perché in } B \text{ si ha } x = l)$$

Si noti che il diagramma dei momenti va disegnato nella parte superiore della trave (dove sono cioè le fibre tese) in quanto i momenti sono tutti negativi.

Esercizio 3

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni della mensola in figura sollecitata da carichi verticali e da una coppia levo-gira applicata nel punto C .

REAZIONI VINCOLARI

Dalle equazioni di equilibrio si ricava (1):

$$\Sigma X = 0 \quad \text{da cui} \\ X_a = 0$$

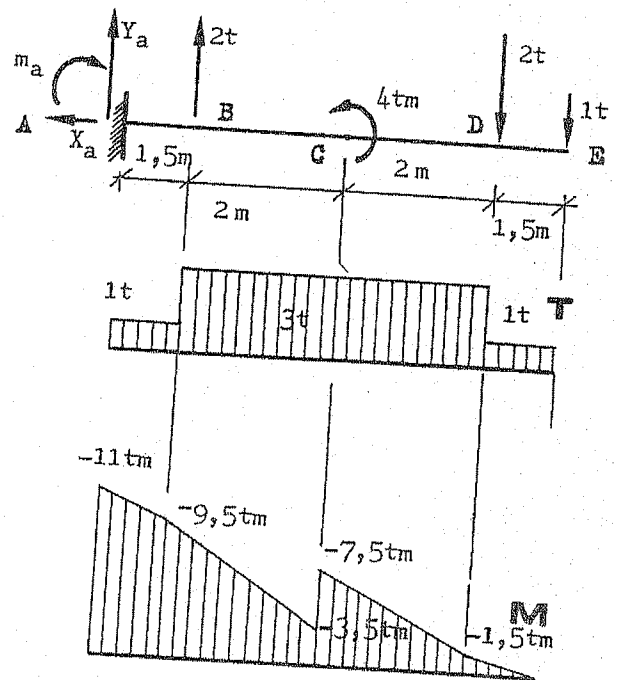
$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{da cui} \\ m_a - 2t \cdot 1,5m - 4tm + 2t \cdot 5,5m + 1t \cdot 7m = 0 \\ m_a = 11tm$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{da cui} \\ Y_a - 2t + 2t + 1t = 0 \\ Y_a = 1t$$

TAGLIO

Nel tratto AB il taglio ha il valore della reazione Y_a . Nel tratto BC il taglio è $Y_a + 2t = 3t$; poiché la coppia in C non influenza le sollecitazioni.

(1) Nel caso dell'incastro (vincolo triplo) le reazioni dovranno opporsi, oltre che alle forze parallele e normali alla trave, anche alla rotazione che le forze attive tendono ad imprimere alla mensola con una coppia m_a di momento uguale e contrario a quello delle forze attive rispetto ad A . (Vedi Belluzzi, op. cit., vol. I, pag. 39).



tazioni di taglio, anche CD sarà sollecitato da un taglio positivo pari a $3 t$. Nel tratto DE il taglio vale $3 t - 2 t = 1 t$. Si può verificare che anche partendo da destra, dall'estremo E , si ottengono gli stessi valori.

SFORZO NORMALE

Non esistendo forze esterne parallele all'asse della trave si ha $N = 0$ su tutta la mensola.

MOMENTO FLETTENTE

Partiamo dall'estremo libero E . Il M_f rispetto ad E è nullo, come si può verificare sommando i momenti di tutte le forze rispetto a tale punto. Se così non fosse il sistema non starebbe in equilibrio perché in E non ci sono vincoli capaci di reagire ad un eventuale M_f . In D il M_f vale $1 t \cdot 1,5 m = 1,5 tm$. In C si ha $M_f = 1 t \cdot 3,5 m + 2 t \cdot 2 m = 7,5 tm$. Tale valore si raggiunge immediatamente prima di C . Immediatamente dopo varrà $M_f = -4 + 7,5 = 3,5 tm$, a causa della coppia applicata in C . In B si ha poi $M_f = 1 t \cdot 5,5 m + 2 t \cdot 4 m - 4 tm = 9,5 tm$. Tali valori vanno assunti col segno negativo in quanto tendono le fibre superiori della trave (v. figura) In A si è già trovato che $M_f = m_a$ vale $11 tm$, nel calcolo delle reazioni dei vincoli. Si può anche trovare come somma delle momenti delle forze attive rispetto ad A , ma tale operazione non differisce da quella del computo della reazione m_a .

Esercizio 4

Calcolare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni della trave in figura.

REAZIONI

Applicando le equazioni della statica si ottiene:

$$\Sigma X = 0 \quad \text{da cui}$$

$$X_a - F = 0$$

$$X_a = 3 t$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{da cui}$$

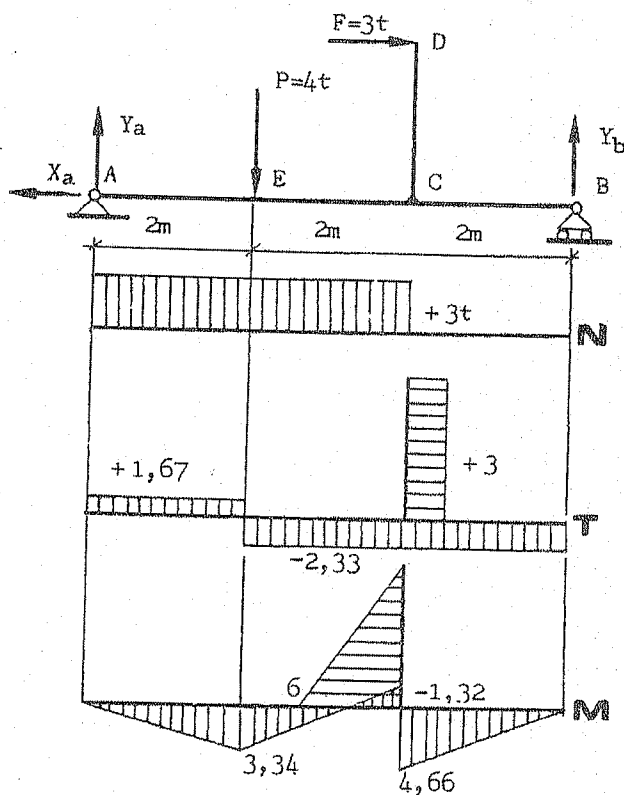
$$Y_b \cdot 6 - 3 t \cdot 2 - 4 t \cdot 2 = 0$$

$$Y_b = \frac{7}{3} t = 2,33 t$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{da cui}$$

$$Y_a - 4 t + 2,33 t = 0$$

$$Y_a = 1,67 t$$



Esercizio 5

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni della trave in figura sollecitata da carichi verticali e da una coppia in O di momento $= 2 \text{ tm}$.

REAZIONI VINCOLARI

Applicando le equazioni di equilibrio si ottiene (1):

$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{da cui}$$

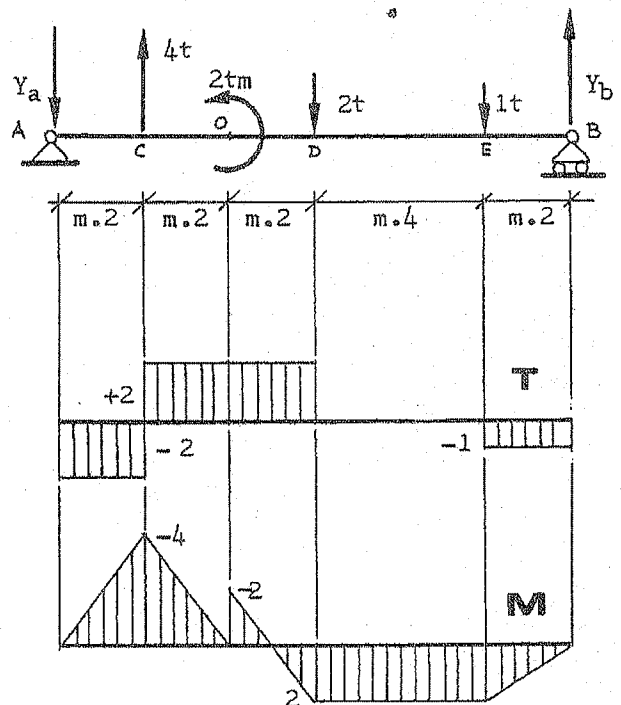
$$-8 \text{ tm} - 2 \text{ tm} + 12 \text{ tm} + 10 \text{ tm} + 12 Y_b = 0 \quad (2)$$

$$Y_b = -1 \text{ t} \quad (\text{rivolta verso l'alto perché la rotazione impressa rispetto ad } A \text{ è negativa})$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad \text{da cui}$$

$$Y_a \cdot 12 \text{ m} + 40 \text{ tm} - 2 \text{ tm} - 2 \text{ tm} = 0$$

$$Y_a = -2 \text{ t} \quad (\text{rivolta verso il basso perché la rotazione impressa rispetto a } B \text{ è negativa})$$



TAGLIO

Nel tratto AC il taglio vale Y_a , cioè 2 t , ed è negativo per le convenzioni accennate. Nel tratto CD il taglio è costante (in quanto non influenzato dalla coppia in O) e vale $-2 \text{ t} + 4 \text{ t} = 2 \text{ t}$ (positivo). Nel tratto DE non esiste sforzo di taglio in quanto avendo le forze applicate in D e in E lo stesso verso, non si hanno slittamenti delle sezioni. Nel tratto EB infine il taglio vale $T = Y_b = 1$ ed è negativo.

SFORZO NORMALE

Non esistendo forze orizzontali non si hanno sollecitazioni di sforzo normale.

(1) Le tre equazioni di equilibrio $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M = 0$, si possono sostituire con le equazioni dei momenti rispetto a due punti qualsiasi della trave. Per semplicità tali punti sono stati fatti coincidere con i vincoli. (Vedi Belluzzi, op. cit. pag. 56 nota 1).

(2) Assunto come senso positivo delle rotazioni quello destrogiro.

Esercizio 6

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni di una trave a mensola con diagramma di carico triangolare (massimo in B dove $q = 4 \text{ t/m}$).

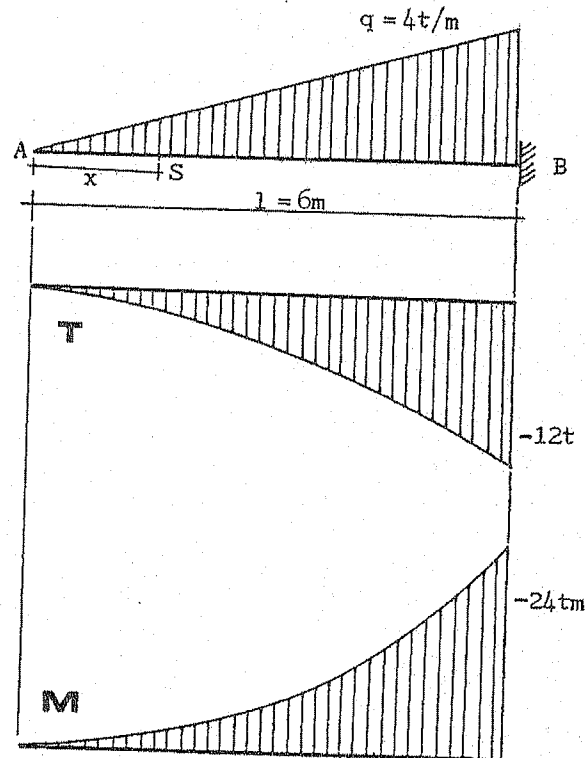
REAZIONI VINCOLARI

L'incastro in B ha una reazione verticale Y_b uguale e contraria al carico:

$$Y_b = \frac{ql}{2} = 12 \text{ t}$$

e un momento M_b uguale e contrario a quello che il carico provoca rispetto al punto B .

$$M_b = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 24 \text{ tm (1)}$$



TAGLIO

Come si deduce dal senso delle forze agenti il taglio è sempre negativo. In una generica sezione S distante x dal punto A esso ha il valore T_s si avrà perciò:

$$T_s = -y \frac{x}{2} \text{ e poiché } y = \frac{q}{l} x \text{ si ottiene}$$

$$T_s = -\frac{q x^2}{l 2} \text{ e si avrà il valore massimo in } B \text{ (} x = 6 \text{) dove } T_b = \frac{q 6^2}{2l}$$

$$T_b = -12 \text{ t}$$

(ugualmente T_s si poteva ottenere con l'integrale:

$$T_s = -\int p dx + C, \text{ e cioè } T_s = -\int \frac{qx}{l} dx).$$

(1) Si è considerato il carico $\frac{ql}{2}$ agente sulla mensola concentrato nel suo baricentro che dista $\frac{l}{3}$ da B .

MOMENTO FLETTENTE

Il M_f si può ricavare direttamente dalla legge di variazione del taglio:

$$M_s = \int T_s dx = \int -\frac{qx^2}{2l} dx = -\frac{qx^3}{6l}$$

La costante di integrazione ha valore zero perché non vi sono altri momenti da sommare a quello risultante. Come verifica si può ricavarlo direttamente considerando che M_s è il prodotto del carico in AS per $\frac{x}{3}$, cioè per la distanza di S dal baricentro del carico considerato.

$$M_s = -\frac{qx^2}{2l} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{qx^3}{6l}$$

In particolare per $x = 6$ si ha $M_b = -24$ t.

Esercizio 7

Trovare le reazioni e i diagrammi di sollecitazione di una trave vincolata in A da una cerniera e in B da un carrello avente una campata di m 4 e uno sbalzo di m 2, caricata con un carico ripartito $p = 2$ t/m come in figura.

REAZIONI VINCOLARI

Applicando le equazioni di equilibrio si ha:

$$\Sigma X = 0; \quad X_a = 0$$

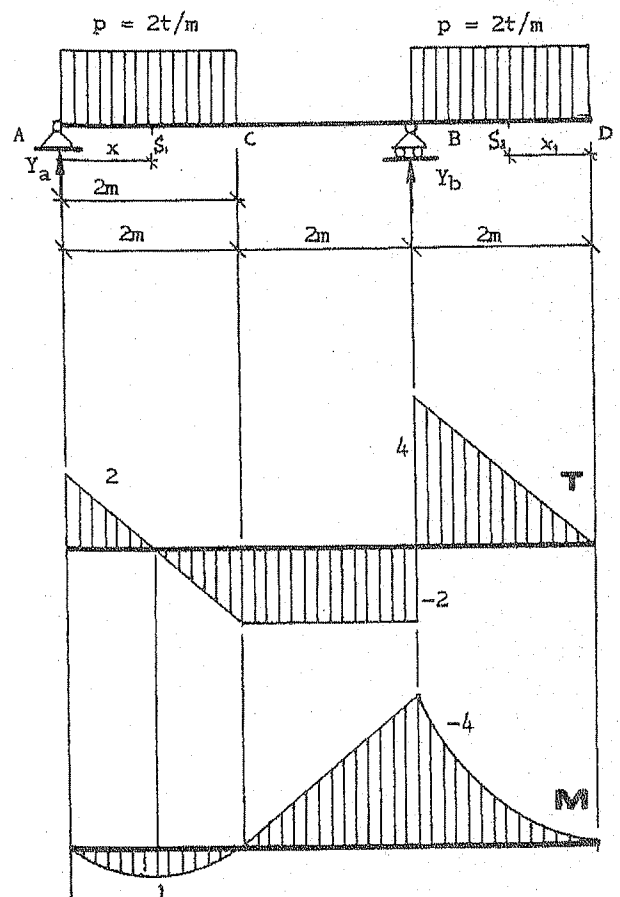
$$\Sigma M_a = 0; \quad Y_b \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 0 \quad (1)$$

$$Y_b = 6 \text{ t}$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_a + 6 - 4 - 4 = 0$$

$$Y_a = 2 \text{ t.}$$

Per il calcolo delle reazioni si è sostituito al carico ripartito il corrispondente peso considerato concentrato nel baricentro del diagramma di carico. Tale operazione non è però possibile per la ricerca delle sollecitazioni se non per intervalli infinitesimi.



(1) Considerando positive le rotazioni levogire.

Esercizio 15

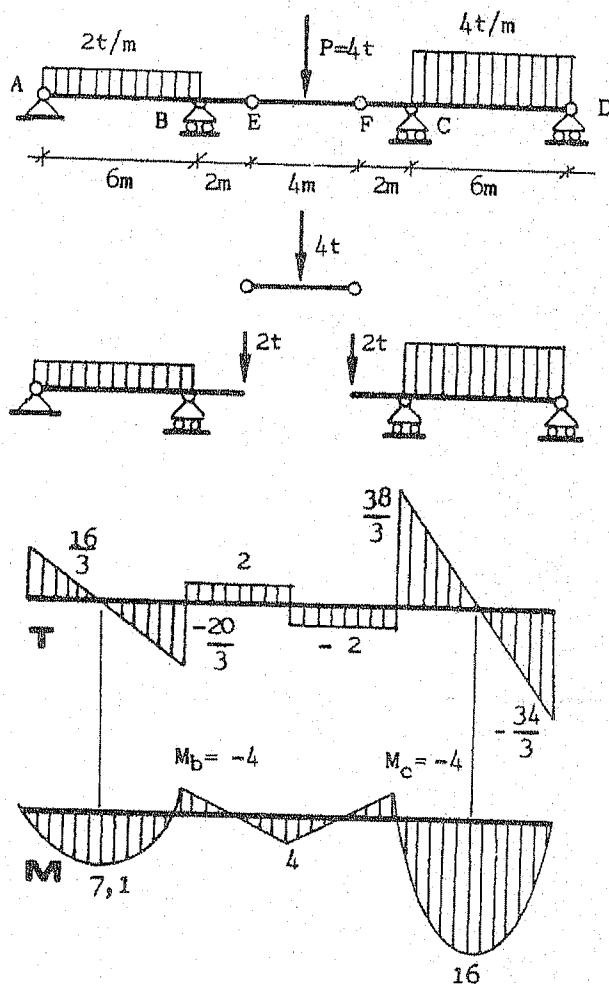
Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi di sollecitazione della trave Gerber in figura.

La trave Gerber è una trave su più appoggi resa isostatica mediante cerniere (1). Viene usata particolarmente quando si temono cedimenti sugli appoggi o quando si vogliono alleggerire i carichi gravanti su alcuni appoggi poco sicuri (nello schema in esame verrebbero alleggeriti, grazie al momento M_b e M_c gli appoggi in A e D).

REAZIONI VINCOLARI

Si può considerare il tratto EF compreso tra le cerniere come una trave caricata in mezzeria che trasmette ai vincoli un carico verticale pari a $\frac{P}{2}$, cioè 2 t. Si considerano

parimenti le parti di trave AE ed FC come travi su due appoggi caricate come indicato dal problema e con un carico di 2 t trasmesso dal tratto EF sull'estremo E dello sbalzo BE , e sull'estremo F dello sbalzo CF . La determinazione delle reazioni in AB e CD , si riduce perciò al problema di calcolare le



reazioni di due travi su due appoggi. Considerando il tratto AS si ottiene:

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= 0 & Y_a + Y_b - 14 &= 0 \\ \Sigma M_a &= 0 & 12 \cdot 3 - Y_a \cdot 6 + 2 \cdot 8 &= 0\end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$Y_a = \frac{16}{3} \qquad Y_b = \frac{26}{3}$$

Con lo stesso procedimento per il tratto FD, attraverso le equazioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= Y_c + Y_d - 26 = 0 \\ \Sigma M_d &= 12 \cdot 8 - Y_c \cdot 6 + 24 \cdot 3 = 0\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$Y_c = \frac{44}{3}, \qquad Y_d = \frac{34}{3}$$

Volendo determinare le reazioni considerando il sistema come una unica trave bisogna scrivere tante equazioni quante sono le reazioni incognite (cioè quattro). Le equazioni fondamentali della statica forniscono due di queste equazioni, mentre le altre due, dette ausiliarie (1), si ricavano dalla condizione che il momento flettente si annulla nelle cerniere, come verrà verificato nei diagrammi del M_f .

Si ottiene quindi il sistema di quattro equazioni:

$$\begin{cases} \Sigma Y = 12 + 4 + 24 - Y_a - Y_b - Y_c - Y_d = 0 \\ \Sigma M_a = 12 \cdot 3 - Y_b \cdot 6 + 4 \cdot 10 - Y_c \cdot 14 + 24 \cdot 15 - Y_d \cdot 20 = 0 \\ M = Y \cdot 8 - 12 \cdot 5 + Y_b \cdot 2 = 0 \\ M = Y \cdot 8 - 24 \cdot 5 + Y_c \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione dà le reazioni cercate.

SFORZO DI TAGLIO

Si può cominciare, anziché da un estremo della trave, dal tratto centrale EF. In questo tratto si ha una reazione della cerniera E di 2 t e quindi un valore costante del taglio da E al punto di applicazione di P pari a 2 t, mentre nel tratto da P ad F il taglio vale $2 - P = -2$ t ed è quindi negativo. Nel tratto BE (vedi figura), non intervenendo altre forze, il taglio si mantiene costante, come pure nel tratto FC. Nel

(1) In un sistema staticamente determinato si possono scrivere tante equazioni ausiliarie quante sono le cerniere interne.

tratto AB e in CD esso varierà con legge lineare, e basta quindi determinare i valori massimo e minimo in corrispondenza degli appoggi. Nel tratto AB il massimo valore è dato dalla reazione $Y_a = \frac{16}{3}$ t, mentre il minimo è dato da $Y_a - 12$ t = $-\frac{20}{3}$ t.

Lo stesso procedimento si adotta nel tratto FD , dove si ricava un massimo in C pari a uno sforzo tagliente di $\frac{38}{3}$ t e un minimo in D pari a $-\frac{34}{3}$ t. Si può notare che il diagramma del taglio non presenta particolarità in corrispondenza delle cerniere, cioè le cerniere trasmettono da un tronco di trave all'altro lo sforzo di taglio, senza fenomeni particolari. Per il mom. flettente invece, il diagramma si deve annullare in corrispondenza delle cerniere.

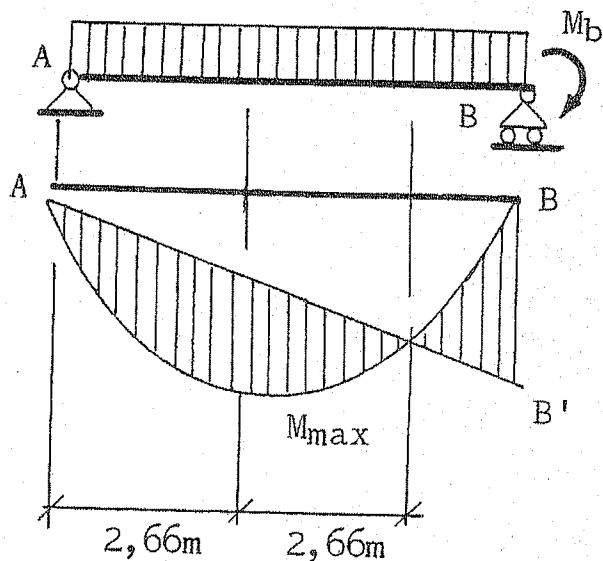
MOMENTO FLETTENTE

Si considera, al solito, il tratto centrale EF come una trave staccata, e si trova il M_{max} causato da P . Esso varrà $\frac{P}{2} \cdot 2 = 4$ tm e il diagramma, annullatosi in E ed F , poiché non intervengono altre forze nei tratti BE ed FC , prosegue con la stessa legge fino a B e C (v. figura). L'andamento del diagramma di M_f in AB si ricava graficamente (2) detraendo al diagramma parabolico del carico ripartito, il diagramma triangolare dovuto al momento M_b . Il massimo M_f in questo tratto si ha in corrispondenza all'annullarsi del diagramma di taglio la cui legge di variazione è:

$T = R_a - px$; $R_a - px = 0$ è il punto in cui si annulla, cioè essendo:

$$R_a = \frac{16}{3} \qquad \frac{16}{3} - 2x = 0 \qquad x = 2,66 \text{ m.}$$

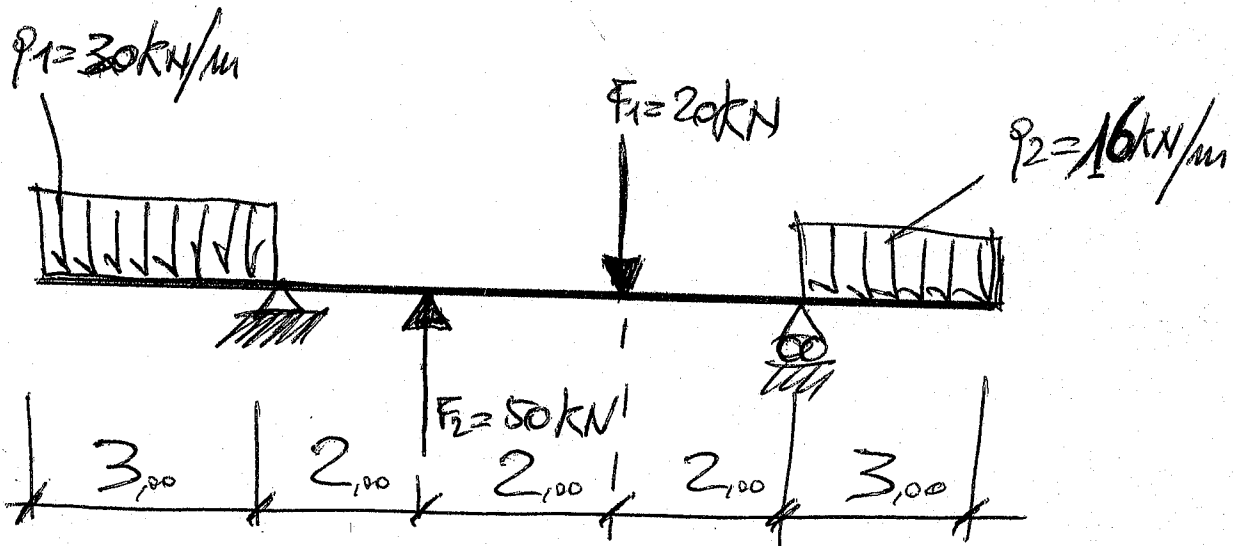
(2) Si traccia il diagramma dei momenti (come in figura) del solo carico ripartito senza tener conto della coppia rovinata dalla sollecitazione di $p/2$ trasmessa in E dal tronco EF , quindi si traccia il diagramma del mom. M della coppia (triangolare). Se si raddrizza AB' fino a farlo coincidere con AB , si ha l'andamento reale del M_f nel tratto AB , come si vede nella pagina precedente.



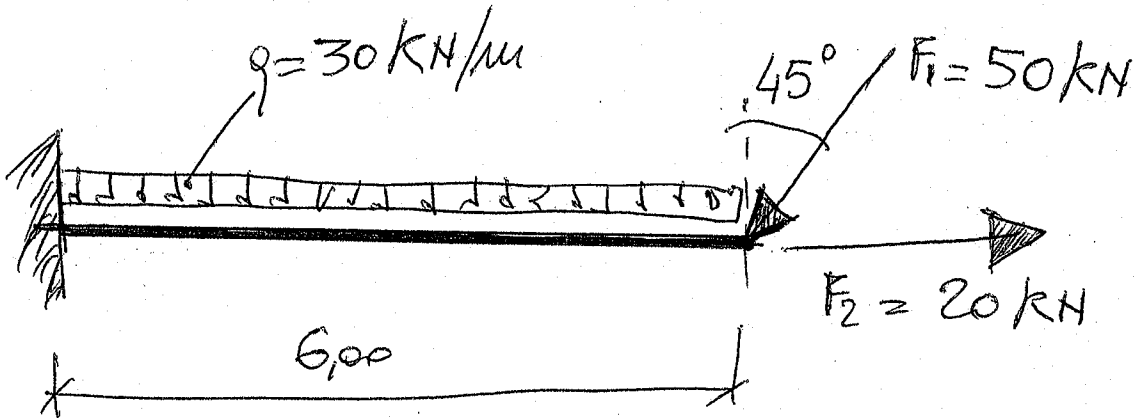
COMPITO di COSTRUZIONI 3B
16 APRILE 2014

DELLE SEGUENTI TRAVI ISOSTATICHE, DETERMINARE
LE REAZIONI VERTICALI E ORIZZONTALI
E I DIAGRAMMI DI: $N - T - M$

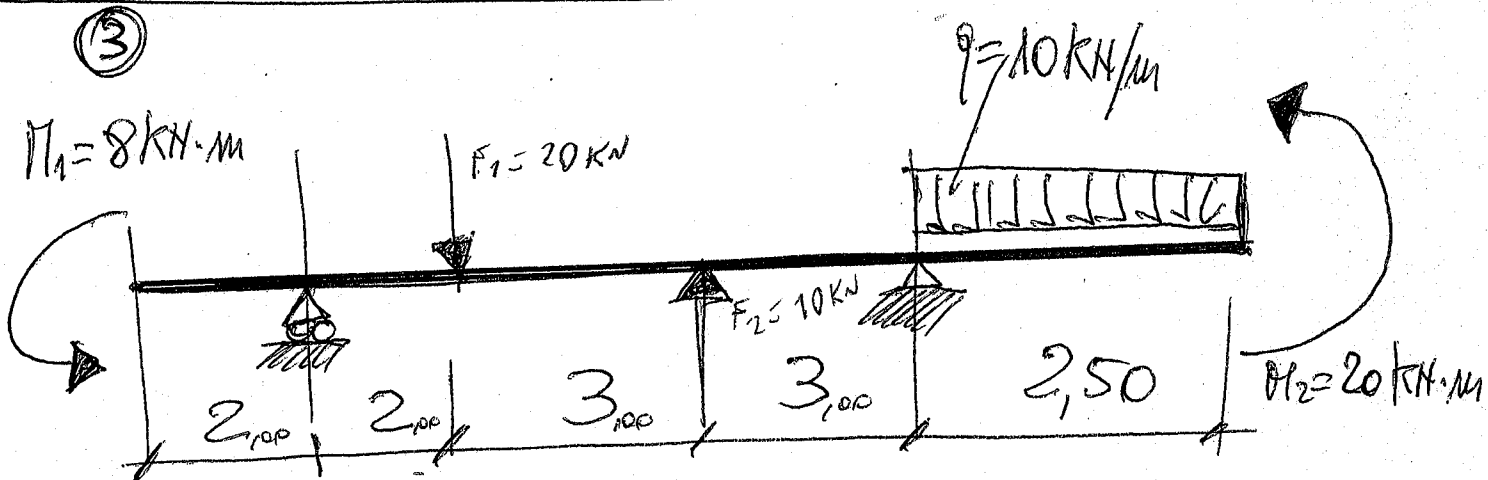
①



②



③



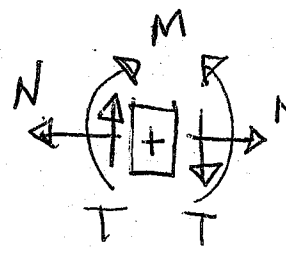
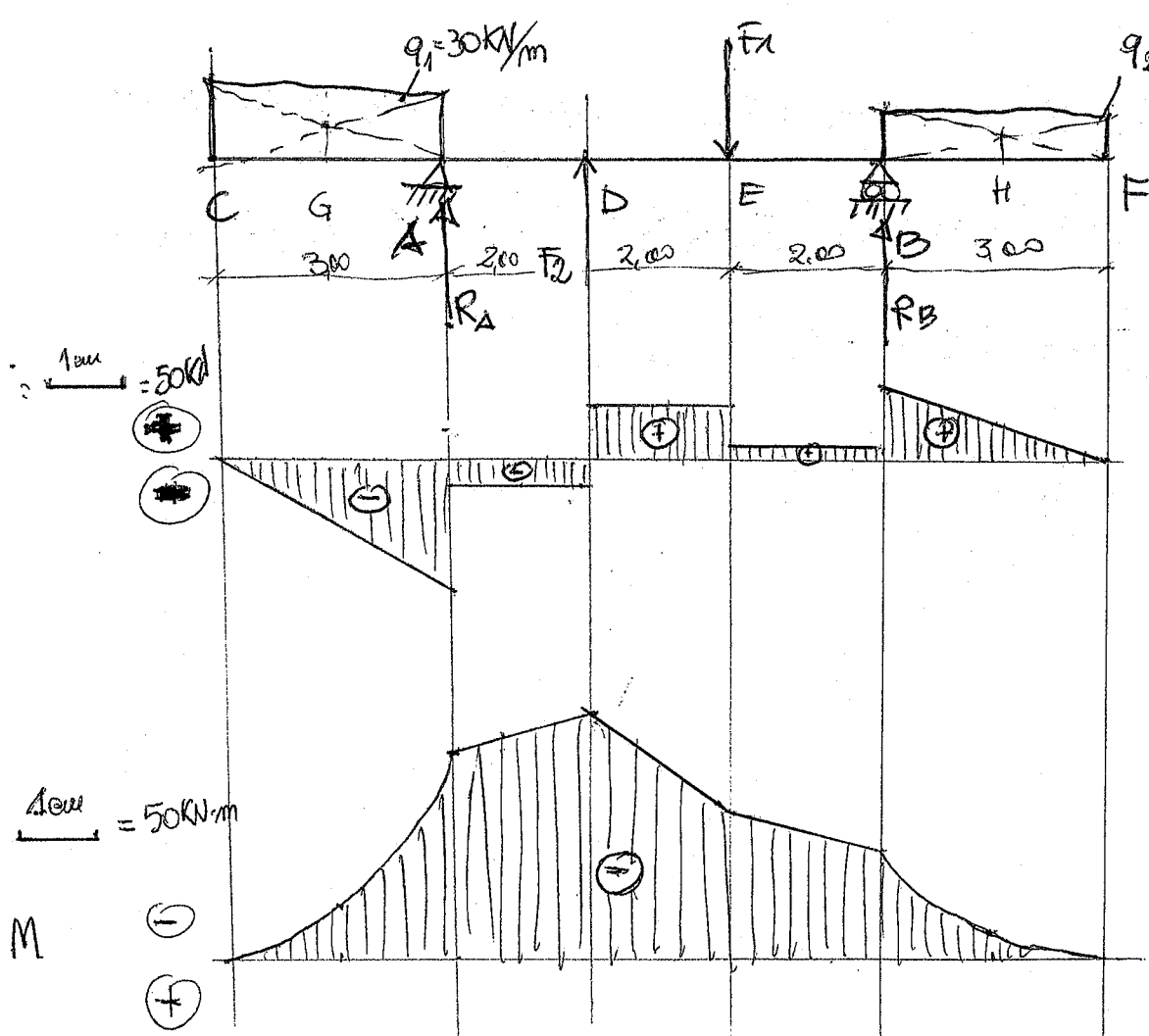
$$R_A = 73,84 \text{ KN}$$

$$R_B = 34,16 \text{ KN}$$

$$F_2 = 50 \text{ KN}$$

$$Q_1 = 90 \text{ KN}$$

$$Q_2 = 48 \text{ KN}$$



$$T_C = 0$$

$$T_{A(D)} = -Q_1 = 90 \text{ KN}$$

$$T_{B(D)} = -Q_1 + R_A = 90 + 73,84 = 16,16 \text{ KN}$$

$$T_{D(B)} = 16,16$$

$$T_{D(D)} = -Q_1 + R_A + F_2 = -90 + 73,84 + 50 = 33,84 \text{ KN}$$

$$T_{E(B)} = F_1 - R_B + Q_2 = 20 - 34,16 + 48 = 33,84 \text{ KN}$$

$$T_{E(D)} = -R_B + Q_2 = -34,16 + 48 = 13,84 \text{ KN}$$

$$T_{B(D)} = Q_2 = 48 \text{ KN}$$

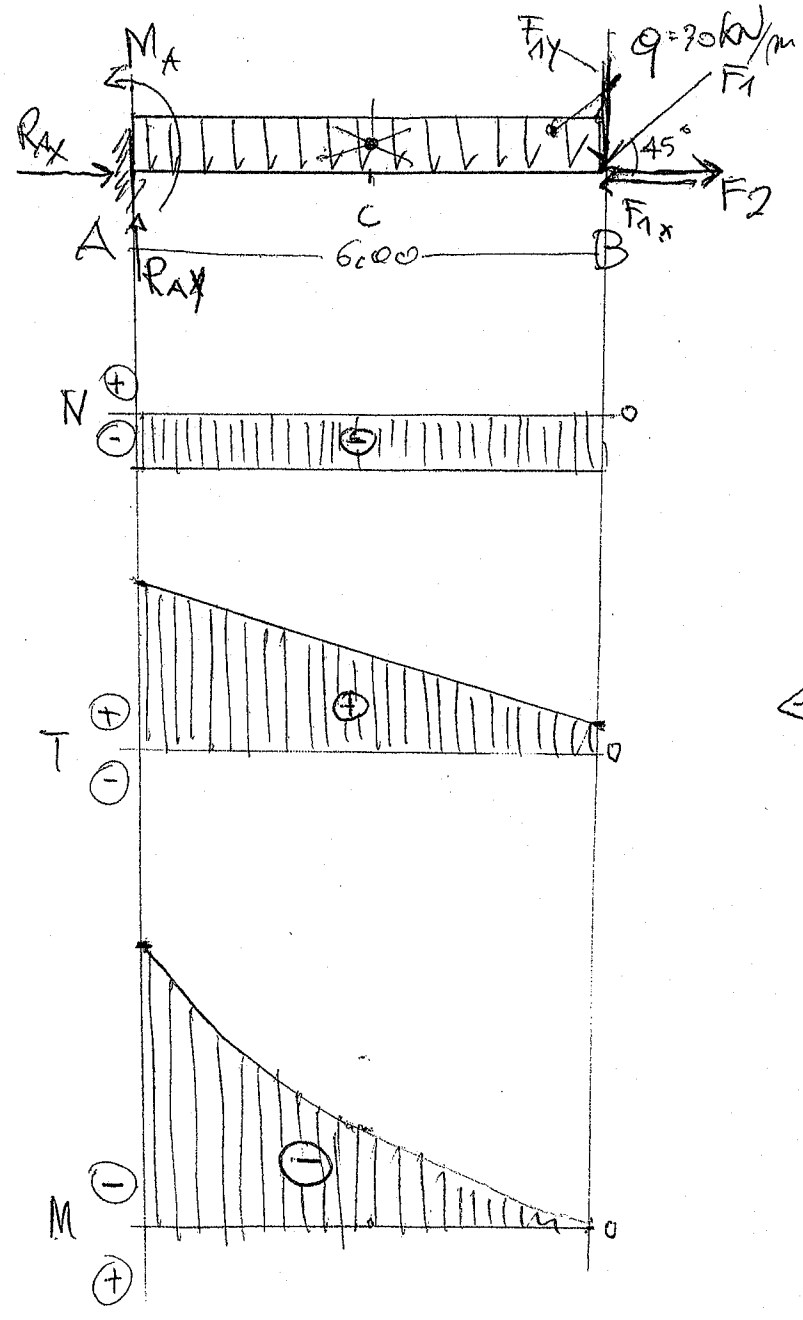
Exercice 2

$F_1 = 50 \text{ kN}$
 $F_2 = 20 \text{ kN}$
 $q = 30 \text{ kN/m}$

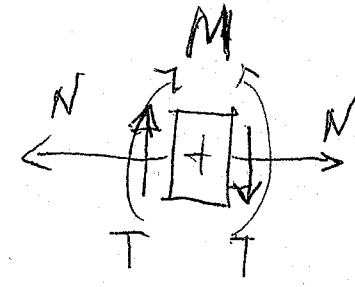
$N \xrightarrow{1 \text{ m}} = 20 \text{ kN}$

$T \xrightarrow{1 \text{ m}} = 400 \text{ kN}$

$M \xrightarrow{1 \text{ m}} = 200 \text{ kNm}$



$F_{1x} = 35,35$
 $F_{1y} = 35,35$
 $F_2 = 20 \text{ kN}$
 $R_{Ax} = 15,35$
 $R_{Ay} = 215,35$
 $M_A = 752,10 \text{ kNm}$



$\sum F_x = -R_{Ax} = -15,35 \text{ kN}$

$\sum F_y = F_2 - F_{1x} = 20 - 35,35 = -15,35 \text{ kN}$

1) $\sum F_y = +R_{Ay} = 215,35 \text{ kN}$

2) $\sum F_x = +F_{1y} = 35,35 \text{ kN}$

$\sum M_A = -M_A = -752,10 \text{ kNm}$

$\sum M_B = 0$

$\sum M_C = -(q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}) + R_{Ay} \cdot 3 - M_A = -30 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 215,35 \cdot 3 - 752,10 = -241,05 \text{ kNm}$

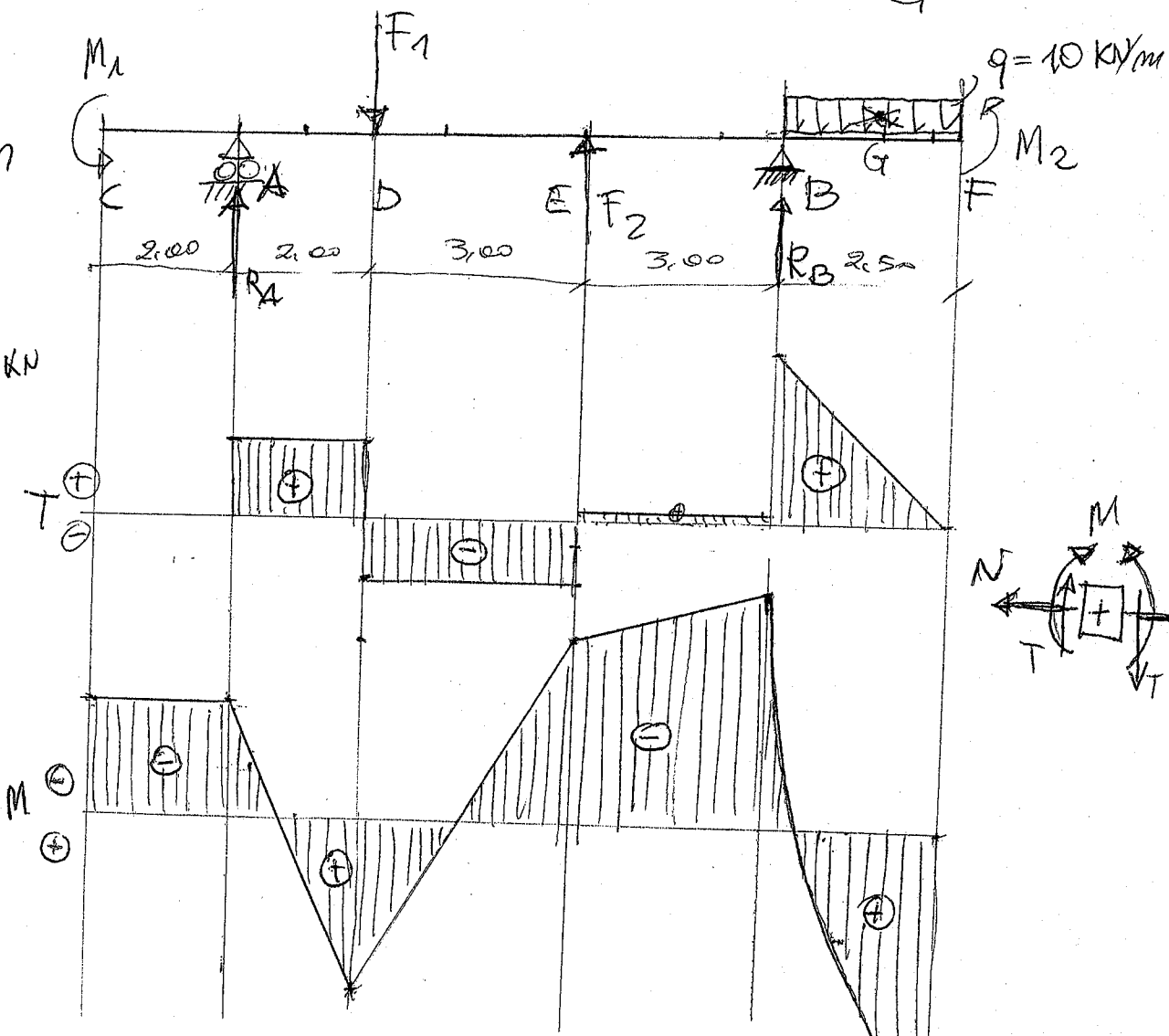
USEFUL

$M_1 = 8 \text{ kNm}$
 $M_2 = 20 \text{ kNm}$
 $F_1 = 20 \text{ kN}$
 $F_2 = 10 \text{ kN}$
 $q = 10 \text{ kN/m}$

$R_A = 10,84 \text{ k}$
 $R_B = 24,16 \text{ k}$
 $Q = 10 \cdot 2,5 = 25$

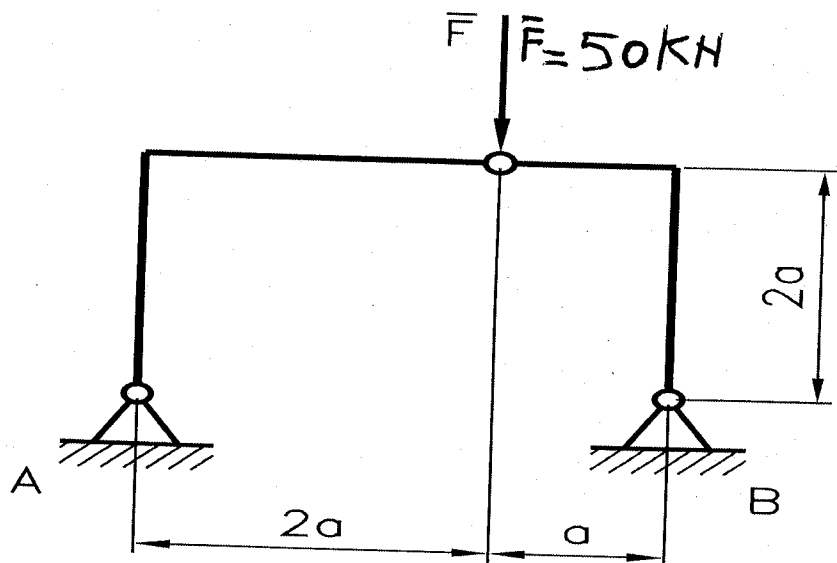
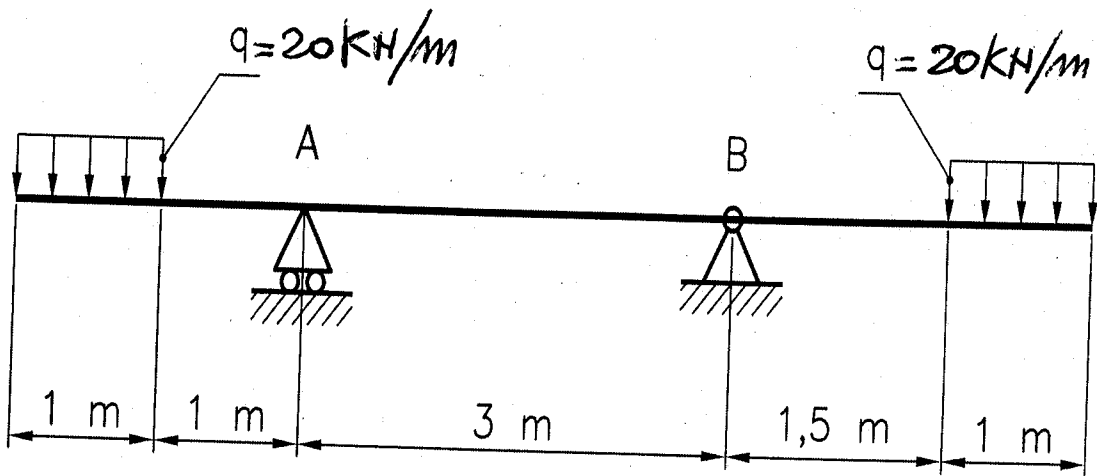
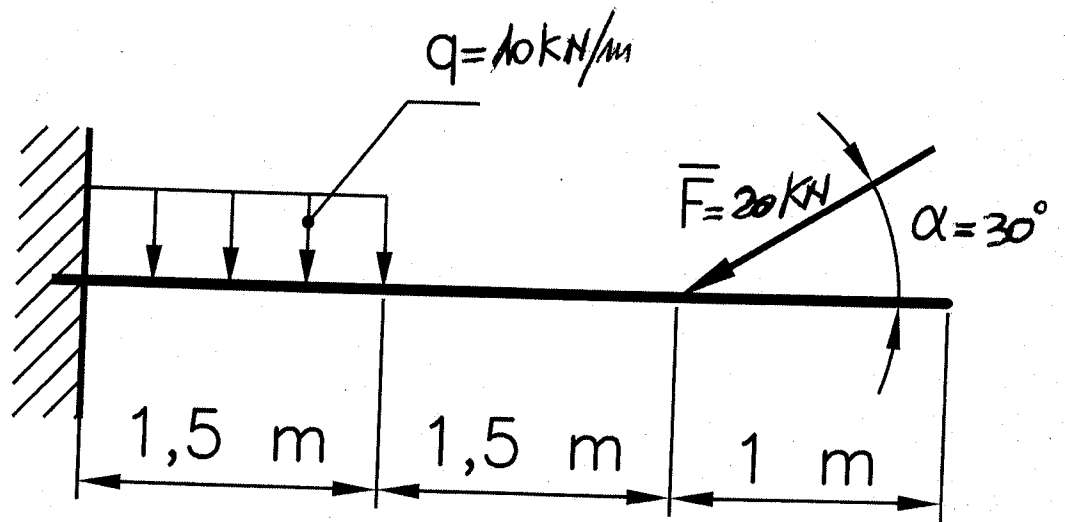
$1 \text{ cm} = 10 \text{ kN}$

$1 \text{ cm} = 5 \text{ kNm}$



$T_E = 0$
 $T_A = +R_A = 10,84 \text{ kN}$
 $T_{D(s)} = R_A = 10,84$
 $T_{D(o)} = R_A - F_1 = 10,84 - 20 = -9,16 \text{ kN}$
 $T_{E(s)} = T_{D(o)} = -9,16$
 $T_{E(o)} = R_B + Q = -24,16 + 25 = +0,84 \text{ kN}$
 $T_{B(s)} = T_{E(o)} = +0,84 \text{ kN}$
 $T_{B(o)} = +Q = 25 \text{ kN}$
 $T_F = 0$

$M_C = -M_1 = -8 \text{ kNm}$
 $M_A = -M_1 = -8 \text{ kNm}$
 $M_D = -M_1 + R_A \cdot 2 = -8 + 10,84 \cdot 2 = 13,68 \text{ k}$
 $M_E = R_B \cdot 3 - Q \cdot (3 + 1,25) - M_2 = 24,16 \cdot 3 - 25 \cdot (4,25) - 20 = -13,77 \text{ kNm}$
 $M_B = Q \cdot 1,5 + M_2 = 25 \cdot 1,5 + 20 = -7 \text{ k}$
 $M_G = (q \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2}) + M_2 = 8,75$
 $M_F = M_2 = 20 \text{ kNm}$



Caratteristiche di sollecitazione

Consideriamo l'equilibrio di un corpo, oltre che nel suo insieme, in tutte le possibili parti in cui può essere diviso. E' chiaro infatti che se un corpo è in equilibrio, dovranno essere in equilibrio anche eventuali porzioni di esso considerate singolarmente. Riferiamoci per semplicità alla trave, intendendo per trave un elemento strutturale in cui una dimensione prevale sulle altre due e che viene schematizzato attraverso una linea (generalmente giacente su un piano), luogo dei baricentri delle sezioni. Tale linea viene detta fibra media della trave.

Ora, se consideriamo la trave in figura 1 essa è chiaramente in equilibrio sotto l'azione della forza attiva F e delle reazioni vincolari $F/2$. Ma se essa è in equilibrio, lo dovrà anche essere la parte di trave AC , di lunghezza b , in figura 2.

Questo significa che nella sezione C si dovranno sviluppare forze tali da equilibrare le forze R_a ed F alla sua sinistra. Trasportiamo allora la forza R_b dal punto B in C , aggiungendo un momento di trasporto $M_c = R_b \cdot d$. Il sistema di forze che agisce sulla sezione C (la forza R_b e il momento M_c), si dice risultante relativa alla sezione C e mantiene in equilibrio la parte di trave AC in quanto abbiamo sostituito ad R_b un sistema di forze equivalente. Sulla sezione C avremo allora una forza diretta verticalmente all'asse della trave ($R_b = F/2$) detta forza di taglio, e un momento $M_c = R_b \cdot d$ detto momento flettente (fig. 2). Se consideriamo allora un concio di trave in C (fig. 3) si avrà equilibrio tra forze a sinistra del concio e forze a destra.

Se la lunghezza del concio è molto piccola le forze a sinistra e a destra del concio saranno uguali e contrarie. Il valore delle forze agenti sul concio rappresenta lo stato di sollecitazione relativo al concio stesso. In genere si avranno anche sforzi in direzione normale alla se-

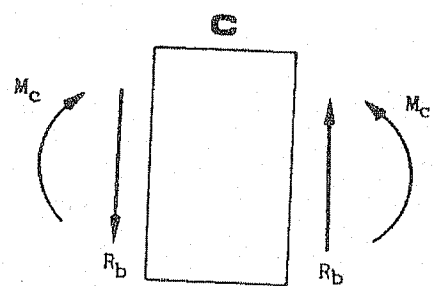
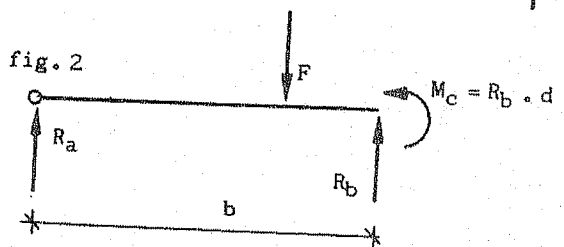
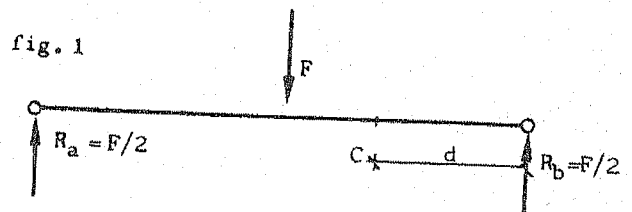


fig. 3

Come si vede le sollecitazioni vengono calcolate a trave indeformata, in quanto l'inflexione della trave altera in modo trascurabile la posizione reciproca delle forze.

Troviamo ora i diagrammi di sollecitazione in una trave con carico ripartito p (fig. 7).

Il procedimento è sempre lo stesso: trovate le reazioni vincolari ($R_a = R_b = pl/2$) si fa la risultante relativa ad una sezione generica s distante x da A e si tracciano i diagrammi relativi ad ogni componente della risultante (N, T, M). Lo sforzo di taglio sarà dato dalla reazione $R_a = pl/2$ meno il contributo dovuto al carico ripartito sul tratto x (che vale $p \cdot x$), (fig. 8).

La funzione del taglio sarà allora

$$T_x = \frac{pl}{2} - px$$

che è la funzione di una retta che si annulla per $x = l/2$, e cioè il taglio è nullo in mezzeria.

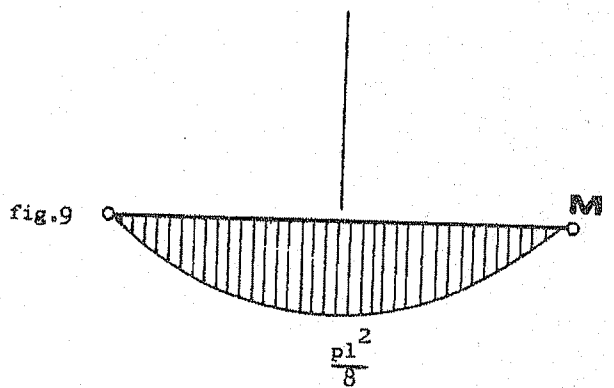
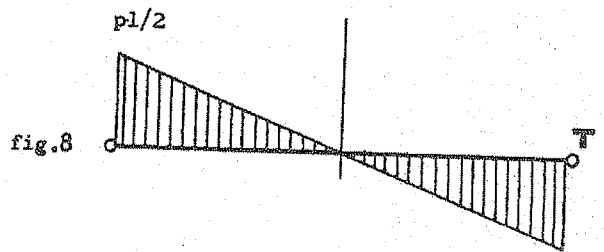
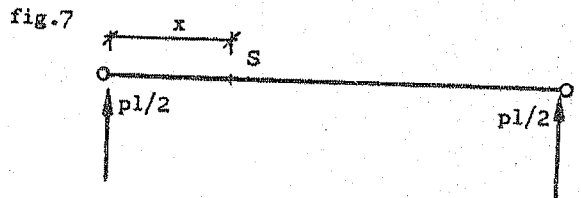
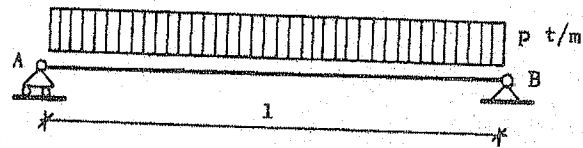
Il valore del momento flettente nella stessa sezione generica S sarà la somma dei momenti generati dalla reazione $pl/2$ e dalla parte di carico che insiste sul tratto di lunghezza x , cioè dalla forza px . Immaginando di concentrare la forza px nel baricentro del corrispondente diagramma di carico (distante $x/2$ dalla sezione S), si avrà la funzione del momento flettente

$$M_x = \frac{pl}{2} x - px \cdot \frac{x}{2}$$

cioè

$$M_x = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2}$$

(fig. 9).



Si nota da quanto detto che la funzione del diagramma di taglio è sempre di un grado superiore alla funzione del diagramma di carico, e la funzione del momento flettente di un grado superiore alla funzione del taglio. Così ad esempio se il carico è uniformemente ripartito (funzione di grado zero), la legge di variazione del taglio sarà una retta (funzione di primo grado) e quella del momento flettente una curva di secondo grado.

Ricaviamo ad esempio i diagrammi di T ed M per una trave appoggiata agli estremi caricata con carico ripartito a diagramma triangolare come in figura. Concentrato il valore del carico nel baricentro del diagramma di carico ($1/3$ da B), si possono trovare le reazioni vincolari:

$$R_a = ql/6 \quad R_b = ql/3$$

Se fissiamo in A l'origine del sistema di riferimento, il diagramma di carico sarà una retta passante per l'origine di equazione:

$$p = \frac{q}{l} x$$

Applicando la A) otteniamo:

$$T_x = - \int p dx + C_1$$

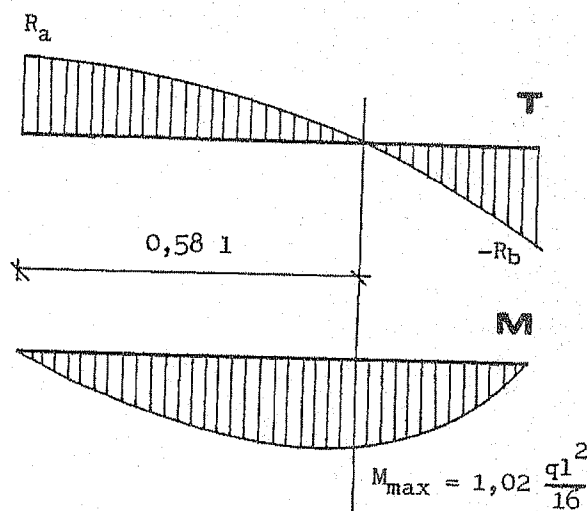
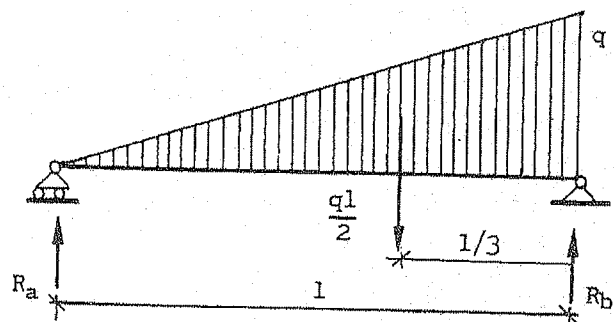
e cioè:

$$T_x = - \int \frac{q}{l} x dx + C_1$$

$$T_x = - \frac{qx^2}{2l} + C_1$$

e poiché C_1 rappresenta il taglio nella sezione iniziale A che vale $R_a = ql/6$:

$$T_x = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l}$$



Possiamo ora ottenere la funzione del diagramma dei momenti flettenti per integrazione della funzione del taglio osservando che questa volta il valore della costante di integrazione è zero in quanto sull'appoggio in A non esistono momenti flettenti. Avremo allora:

$$Mx = \int Tx dx \quad Mx = \int \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} dx \quad \text{da cui} \quad Mx = \frac{ql}{6} x - \frac{qx^3}{6l}$$

Il massimo momento flettente si avrà nel punto in cui si annulla la derivata prima di Mx e cioè per $Tx = 0$:

$$Tx = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{l}{3} = 0,571$$

Il momento massimo varrà quindi:

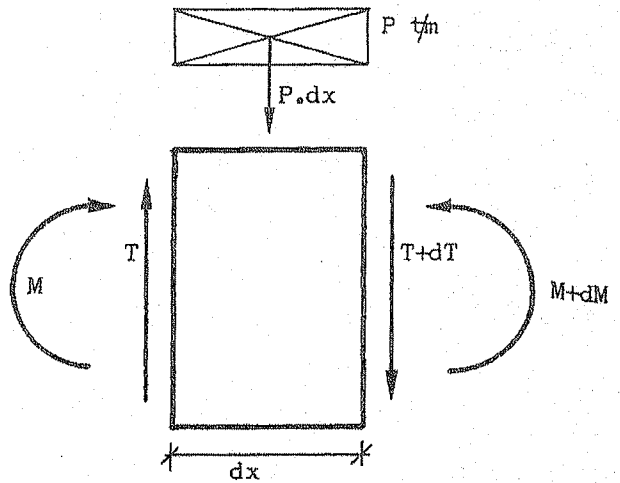
$$M_{max} = 1,02 \frac{ql^2}{16}$$

Relazioni analitiche tra i diagrammi di sollecitazione

Abbiamo finora disegnato i diagrammi di sollecitazione considerando separatamente, cioè non relazionati da leggi generali che colleghino, nella stessa struttura, la funzione del carico a quella del taglio e a quella del momento flettente. Esaminiamo ora dal punto di vista teorico tali relazioni, che risulteranno di particolare utilità nello studio o nella verifica dell'andamento dei diagrammi di strutture complesse.

Consideriamo un concio di trave (caricata con carico ripartito) di lunghezza infinitesima dx come nella figura accanto. Abbiamo visto che in genere lo stato di sollecitazione varia da una sezione all'altra. Poiché la distanza tra le sezioni considerate è infinitesima, e le funzioni dei diagrammi si suppongono continue nel tratto considerato, la variazione delle sollecitazioni da un sezione all'altra sarà infinitesima.

Avremo allora nella sezione di sinistra le sollecitazioni M (momento flettente) e T (taglio) e in quella di destra $M + dM$ e $T + dT$. Perché il concio elementare sia in equilibrio, debbono essere rispettate le equazioni cardinali della statica che in questo caso sono:



$$\Sigma Y = 0 \text{ da cui } T - p \cdot dx = T + dT \quad (p \cdot dx \text{ è il valore della forza dovuta al carico ripartito})$$

$$\Sigma M = 0 \text{ da cui } M + Tdx - p dx \cdot \frac{dx}{2} = M + dM.$$

La seconda equazione, ottenuta facendo il momento rispetto a un polo preso sulla sezione di destra, contiene un infinitesimo di secondo ordine che si può trascurare rispetto a quelli del primo. Le due equazioni allora si possono scrivere:

$$A) \quad p = - \frac{dT}{dx} \quad \text{e cioè} \quad T = \int - p \, dx + C_1$$

$$B) \quad T = \frac{dM}{dx} \quad \text{e cioè} \quad M = \int T \, dx + C_2$$

Quindi il diagramma di taglio si può ottenere integrando il diagramma di carico cambiato di segno a meno di una costante C_1 , che rappresenta il taglio iniziale, e il diagramma del momento flettente si può ottenere integrando il diagramma di taglio a meno di una costante C_2 che rappresenta il momento nella sezione iniziale.

SFORZO NORMALE

Le uniche forze parallele all'asse della trave sono la reazione X_a e la forza F che agiscono sul settore di trave AC . Si avrà quindi uno sforzo normale di 3 t nel tratto AC (positivo perché di trazione), mentre nel tratto CB e DC , non agiscono forze parallele all'asse delle parti di trave, quindi tali settori sono scarichi per quanto riguarda lo sforzo normale.

SFORZO DI TAGLIO

Nel tratto AE sforzo positivo pari a Y_a cioè 1,67 t. Nel tratto EC il taglio vale $Y_a - P = -2,33$ t. Nel tratto CB il taglio vale $Y_b = 2,33$. Nel tratto DC vale $F = 3$ t. Il fatto che nel tratto DC il taglio sia positivo si deduce dal tipo di slittamento ($\uparrow \downarrow$) che la forza F e la reazione X_a spostabile in C tendono ad imprimere alle sezioni del tratto di trave.

MOMENTO FLETTENTE

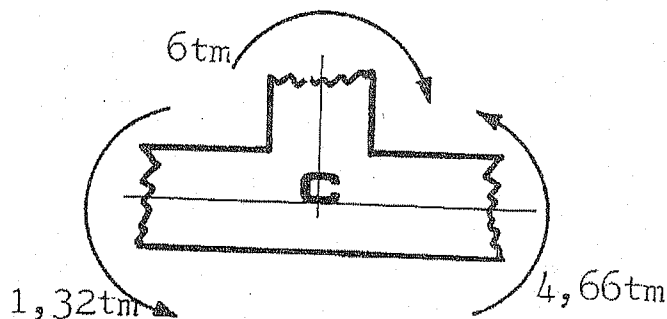
Partiamo dall'estremo A , dove il momento flettente è chiaramente nullo. Nel punto E il momento vale $Y_a \cdot 2 = 3,34$ tm. Nel punto C vale $Y_a \cdot 4 - P \cdot 2 = 1,67 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = -1,32$ tm, quindi il diagramma in tale punto esprime il fatto che le fibre tese sono sulla parte superiore della trave. Sempre nel nodo C si ha come momento rispetto a $R_b \cdot 2 = 4,66$ tm. Nel tratto DC si ha il momento massimo in C , $F \cdot 2 = 6$ tm.

VERIFICA

Se le reazioni sono esatte, la somma dei momenti rispetto al nodo C dovrebbe essere nulla:

$$F \cdot 2 - P \cdot 2 + Y_a \cdot 4 - Y_b \cdot 2 = 0,02 \text{ tm}$$

L'errore di 0,02 tm (in ogni caso accettabile) è dovuto all'approssimazione di Y_b .



DIAGRAMMI DELLE SOLLECITAZIONI

Si sostituiscono ai vincoli le corrispondenti reazioni e si studiano gli effetti che tali forze, insieme alle forze attive (in questo caso P) provocano sulla trave.

SFORZO NORMALE

Non esistendo forze parallele all'asse della trave non si hanno sollecitazioni di trazione o compressione. $N = 0$.

TAGLIO

Il taglio ha valore positivo nel tratto a e negativo nel tratto b (1). Nel primo tratto il taglio ha il valore della reazione R_a , cioè si ha

$$T_a = \frac{Pb}{l}$$

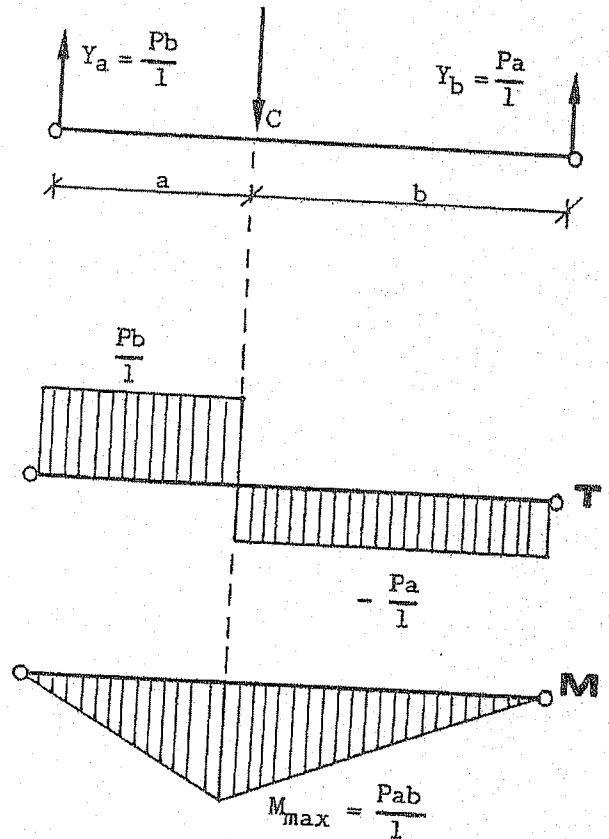
Nel tratto b il taglio vale

$$T_b = \frac{Pb}{l} - P$$

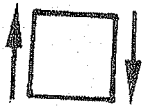
$$T_b = -\frac{Pa}{l} \quad (\text{il taglio assume cioè il valore di } -R_b)$$

MOMENTO FLETTENTE

In una generica sezione S il momento flettente vale $M_s = R_b x$. Nel tratto a $R = R_a$, mentre x rappresenta la distanza di S da A , nel tratto b



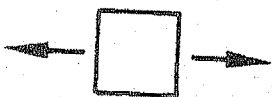
(1) Si ricorda che per convenzione si assumono come segni delle sollecitazioni:



$T (+)$ taglio positivo



$M_f (+)$ momento flettente positivo (sono tese le fibre inferiori e compresse le superiori)

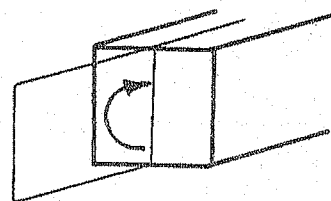
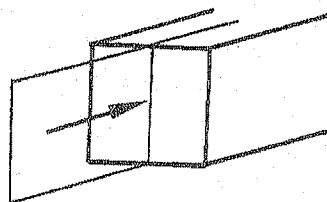
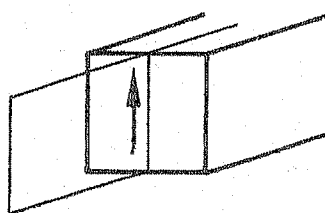


$N (+)$ sforzo normale positivo (trazione).

DIMENSIONAMENTO DELLE SEZIONI

Ogni sezione di trave è sottoposta, a meno che le forze esterne non siano nulle, a delle sollecitazioni cui il materiale impiegato deve essere in grado di reagire. Il problema del dimensionamento della sezione è appunto quello di stabilire una condizione di resistenza ottimale alle sollecitazioni agenti sulla trave, in modo che le sollecitazioni agenti su ogni sezione non facciano superare al materiale le massime tensioni ammissibili. In genere si assume come tensione ammissibile σ_0 una tensione molto lontana dal limite di snervamento. Il *coefficiente di sicurezza* aumenta quanto maggiore è il rapporto tra il σ di snervamento e il σ_0 assunto. Nel dimensionamento di una sezione dunque bisogna tenere presenti tutte le tensioni agenti sulla sezione. Esse sono:

NEL PIANO



1) tensioni tangenziali τ da uno sforzo di taglio:

$$\tau = \frac{TS_i}{Jb_i}$$

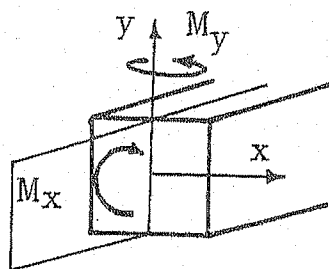
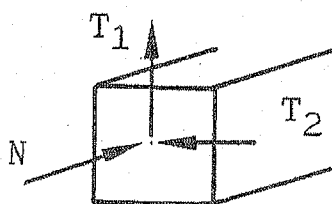
2) tensioni normali σ prodotte da uno sforzo di compressione (o trazione):

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

3) tensioni normali σ prodotte da un momento flettente:

$$\sigma = \frac{My}{J}$$

NELLO SPAZIO



Una forza applicata nel baricentro della sezione, se non giace sul piano di simmetria delle sezioni, ha 3 componenti: uno sforzo normale N e due componenti dello sforzo di taglio T_1 e T_2 .

Nello spazio vi possono essere 3 rotazioni: intorno ad x , y e intorno all'asse z della trave. Le rotazioni intorno ad x e ad y corrispondono alle 2 flessioni rette in cui è scomponibile una flessione deviata.

Alla rotazione intorno all'asse z (asse della trave), corrisponde il momento torcente che produce tensioni tangenziali τ .

Le tensioni dovute a queste sollecitazioni sono allora:

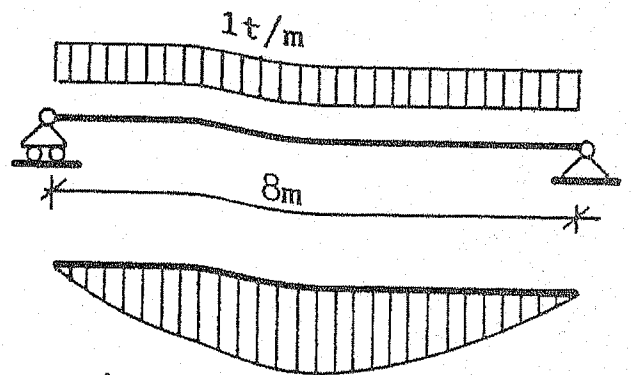
$$\begin{cases} T_1 \rightarrow \tau_1 \\ T_2 \rightarrow \tau_2 \\ M_1 \rightarrow \tau_3 \end{cases} \quad \begin{cases} N \rightarrow \sigma_1 \\ M_x \rightarrow \sigma_2 \\ M_y \rightarrow \sigma_3 \end{cases}$$
 vi sono cioè nello spazio tre tensioni tangenziali dovute al taglio e al momento torcente e tre tensioni normali dovute alla flessione deviata e allo sforzo normale.

Occorre quindi distinguere, nel dimensionamento di una sezione, se le sollecitazioni agiscono secondo il piano di simmetria della trave (nel qual caso si devono tenere presenti tre sollecitazioni) oppure se le sollecitazioni agiscono secondo altri piani comunque orientati (e si hanno allora sei sollecitazioni). Una volta stabilita questa distinzione, se la trave da dimensionare dovrà essere di sezione costante si progetta la sezione in modo che possa resistere alle sollecitazioni massime, stabilite mediante i diagrammi. Nel caso di sollecitazioni di N ed M_y , si assume, come si vedrà meglio nelle applicazioni, il σ_s di sicurezza diminuito delle tensioni σ dovute ad N e si progetta la sezione al solo M_y . Nel caso di T ed M_y , in genere si dimensiona la sezione al solo M_y , essendo il valore di T (nei casi ordinari) meno rilevante.

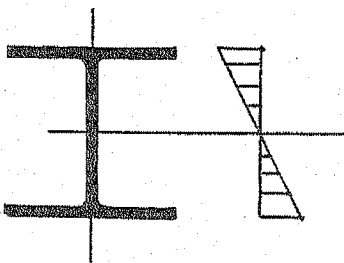
Esercizio 30

Dimensionare la sezione di una trave caricata con un carico ripartito $p = 1 \text{ t/m}$. e avente una luce di 8 m, nel caso in cui si usino travi in ferro e in legno.

Si nota subito che le sollecitazioni giacciono sul piano di simmetria e che lo sforzo normale è assente. Essendo, in travi caricate in questo modo, molto piccolo lo sforzo di taglio, il dimensionamento va fatto tenendo presente il solo M_y .



TRAVE IN FERRO



Al variare della distanza y dall'asse neutro di un elementino di una generica sezione di trave, le tensioni variano con la legge lineare $\sigma = \frac{M y}{J_x}$

dove M è il momento flettente nella sezione considerata. Se vogliamo trovare il punto più sollecitato della trave, dobbiamo cercare la sezione in cui è massimo il momento flettente e di questa sezione

dobbiamo considerare il punto più distante dall'asse neutro. Il momento flettente massimo si ha in mezzeria dove vale:

$$M_{max} = \frac{p l^2}{8} = 8 \cdot 10^5 \text{ kg cm.}$$

per progettare la sezione bisogna imporre che $\sigma_0 \geq \sigma_{max}$:

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{J_x} = \frac{M}{W_x} \text{ ed avendo (per l'acciaio Aq 42) (1) } \sigma_0 = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{si determina il modulo di resistenza } \frac{J_x}{Y_{max}} = W_x = \frac{800.000 \text{ kg cm}}{1.400 \text{ kg/cm}^2} = 572 \text{ cm}^3$$

Volendo usare ad esempio dei profilati ad ala larga (profilati aventi l'altezza dell'anima uguale alla larghezza delle ali), si cerca sul manuale un modulo di rigidezza che si avvicini a quello desiderato ($W_x = 572 \text{ cm}^3$). Sul manuale si trovano due valori vicini a quello cercato: il normal profilato NP30 che ha un $W_x = 632 \text{ cm}^3$ e NP28 con $W_x = 541 \text{ cm}^3$. Vogliamo verificare ora se entrambi i profilati vanno ugualmente bene allo scopo. Per fare questo si deve sostituire nella

espressione $\sigma = \frac{W}{M}$ i moduli di rigidezza relativi ai valori trovati e

vedere quanto le sezioni sono sollecitate. In particolare interessa sapere se usando i profilati trovati si hanno delle σ maggiori o minori di quelle ammissibili ($\sigma_0 = 1400 \text{ kg/cm}^2$).

$$\text{NP 28 } \sigma = \frac{8 \cdot 10^5}{541} = 1470 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_0 \text{ (non accettabile)}$$

$$\text{NP 30 } \sigma = \frac{8 \cdot 10^5}{652} = 1220 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0 \text{ (accettabile)}$$

Il profilato da usare sarà quindi lo NP 30. Tuttavia per le grandi luci si possono usare delle travi a momento d'inerzia variabile. La variazione di J_x si ottiene aggiungendo delle piattabande saldate (o bullonate) nel tratto di trave più sollecitato. Se si disegna, oltre il diagramma dei M , anche il diagramma dei momenti resistenti dato dal prodotto $\sigma \cdot W$, si nota che per una trave a sezione continua il diagramma di $\sigma \cdot W$ è rettilineo, mentre per le travi a inerzia variabile (fig. b), tale diagramma presenta una discontinuità in corrispondenza del rinforzo, con evidente economia di materiale.

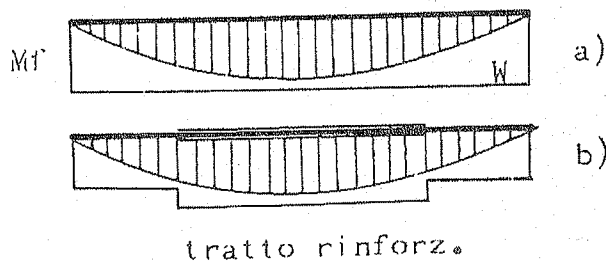
TRAVE IN LEGNO

Il problema del dimensionamento di una sezione in legno è, nella pratica, leggermente diverso da quello del dimensionamento di un profilato. Mentre infatti per un profilato bisogna ricercare W e trovare sul

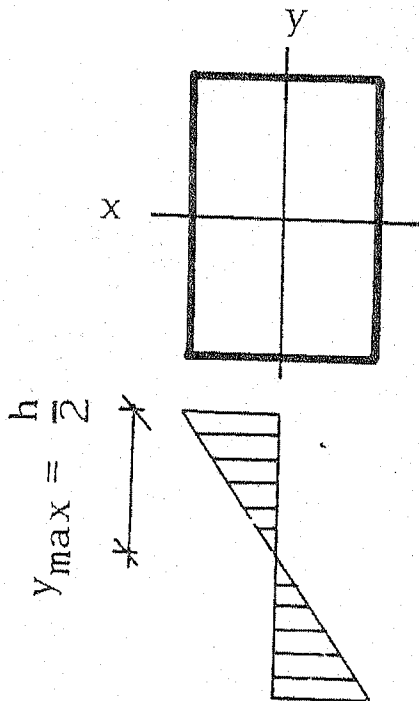
(1) La sigla del tipo di acciaio (Aq 42) sta ad indicare che tale qualità di acciaio ha un limite di snervamento σ_n pari a 42 kg/mm^2 , e poi-

ché si assume in genere $\sigma_0 = \frac{\sigma_n}{3}$ si ha:

$$\sigma_0 = \frac{42}{3} \text{ kg/mm}^2 = 1.400 \text{ kg/cm}^2$$



manuale quale dei tipi di profilati prodotti si avvicina maggiormente al modulo di resistenza richiesto, per il legno bisogna determinare le dimensioni (b ed h nel caso di sez. rettangolare). Fissiamo un rapporto tra base e altezza: $b = \frac{5}{7} h$. (Come σ_0 di sicurezza si assume in genere per il legno 80 kg/cm^2 . Facendo lavorare il legno in tali condizioni infatti, questo materiale può considerarsi isotropo).



Poiché il punto più distante dall'asse neutro è $\frac{h}{2}$ si può scrivere:

$$W_x = \frac{J_x}{Y_{max}} \text{ ed essendo per sezione rettangolare:}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} \text{ si ha:}$$

$$W_x = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \text{ ed avendo fissato } b = \frac{5}{7} h \text{ si ha:}$$

$$W_x = \frac{5h \cdot h^2}{7 \cdot 6} = \frac{5h^3}{42}$$

che è il modulo di resistenza in funzione di h .

Molto importante è ricordare il significato fisico dell'espressione che si usa, una volta ottenuto W_x , per dimensionare la sezione. Nella espressione $\sigma \cdot W = M_f$ infatti il secondo membro è la causa della sollecitazione, mentre $\sigma \cdot W$ è l'effetto, cioè la reazione che le forze molecolari esercitano per equilibrare la sollecitazione del momento flettente. Si produce cioè nel materiale una tensione σ che tende, insieme alle caratteristiche geometriche della sezione (la cui attitudine a resistere alla sollecitazione è espressa dal modulo di resistenza W) ad equilibrare le sollecitazioni in atto. Poiché, fissando $W_x = \frac{5h^3}{42}$ abbiamo fissato la forma della sezione ma non le dimensioni, nell'espressione $\sigma W = M_f$, W deve avere dimensioni tali che σ rimanga entro i limiti di sicurezza, e cioè:

$$\sigma_0 W_x = M_f, \text{ da cui } W_x = \frac{M_f}{\sigma_0}; \quad \text{e cioè:} \quad W_x = \frac{5h^3}{42} = \frac{8 \cdot 10^5}{80}$$

$$\text{da cui } h^3 = \frac{42 \cdot 8 \cdot 10^5}{5 \cdot 80}; \quad h = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 10^4}{5}} = 44$$

ed essendo $b = \frac{5}{7} h$ si ha $b = \frac{5 \cdot 44}{7} = 31$; quindi 44 e 31 cm. sono le dimensioni ottimali della sezione. Tuttavia, cercando sul manuale, si

riscontra che questo tipo di sezione non viene prodotto. Le sezioni più simili sono 40×32 e 45×32 . Verificandole entrambe si ha:

$$\text{sez. } 45 \times 32 \quad W_x = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{64.000}{6} = 10.700 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{10^5 \cdot 8}{107 \cdot 10^2} = 75 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0 \text{ (sez. accettabile)}$$

$$\text{sez. } 40 \times 32 \quad W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{32 \cdot 1600}{6} = 8.560 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{M_l}{W_x} = \frac{8 \cdot 10^5}{8560} = 94 \text{ kg/cm}^2 \text{ (sez. non accettabile)}$$

la sezione da adottare sarà senz'altro la 45×32 .

Esercizio 31

Trovare la posizione dell'asse neutro e il diagramma delle tensioni in una trave IPE 500 caricata con un carico N di 30 t in C di coordinate $C(0,25)$ rispetto agli assi principali d'inerzia (v. figura).

$$h = 500 \text{ mm.}$$

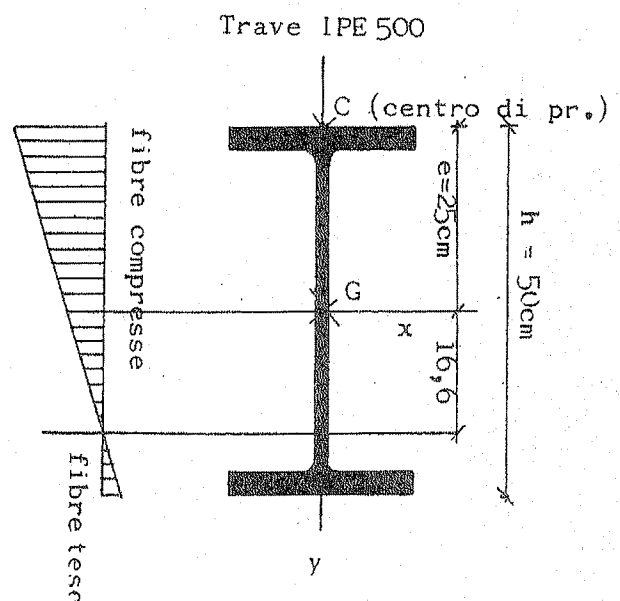
$$\text{Area sez.} = 116 \text{ cm}^2$$

$$J_x = 48200 \text{ cm}^4$$

Il carico, eccentrico di 25 cm rispetto al baricentro G produce una sollecitazione di sforzo normale e una di flessione. Trasportata infatti la forza N nel baricentro si ha uno sforzo normale N e un momento flettente $N_e = 30 \text{ t} \cdot 25 \text{ cm}$ il cui piano di sollecitazione ha per traccia la y . La flessione è quindi retta. Nel pilastro presso inflesso ci saranno delle parti tese (σ positivo) e delle parti compresse (σ negativo) divise da un asse neutro (intorno a cui ruotano le sezioni) in cui si ha $\sigma = 0$.

Note le coordinate di $C(x_0, y_0)$, si sa che, nel caso generico di sollecitazione deviata (di cui la flessione retta è un caso particolare, le sollecitazioni sono date da uno sforzo normale N/A , e da due momenti flettenti secondo gli assi x e y ,

$$\frac{Ny_0}{J_x} y, \quad \frac{Nx_0}{J_y} x$$



perciò in totale la sollecitazione produce una

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_0y}{J_x} + \frac{Nx_0x}{J_y}$$

da cui ponendo $J_x = \rho_x^2 A$ si ha:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{A} \cdot \frac{y_0y}{\rho_x^2} + \frac{N}{A} \cdot \frac{x_0x}{\rho_y^2} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_0y}{\rho_x^2} + \frac{x_0x}{\rho_y^2} \right)$$

Il luogo dei punti in cui $\sigma = 0$ è cioè una retta di equazione

$$\frac{y_0y}{\rho_x^2} + \frac{x_0x}{\rho_y^2} = -1$$

e introducendo le coordinate di $C(0,25)$ $\frac{25y}{\rho_x^2} = -1$ (a)

e rendendo l'equaz. dell'asse neutro in forma esplicita $y = -\frac{\rho_x^2}{25}$ (parallela a y). Determinando poi ρ_x^2 , attraverso i dati forniti dai manuali si ha:

$$\rho_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{48200 \text{ cm}^4}{116 \text{ cm}^2} = 416 \text{ cm}^2 \text{ per cui la (a) diventa}$$

$$y = -\frac{416 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}}$$

e cioè $y = 16,6 \text{ cm}$ che è l'equazione dell'asse neutro, dove $\sigma = 0$. Poiché il diagramma delle σ ha andamento lineare, per determinarlo basta conoscerne due punti di cui uno noto ($\sigma = 0$ nell'asse neutro). L'altro punto del diagramma si ottiene dalla constatazione che si ha in corrispondenza di G :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30.000 \text{ kg}}{116 \text{ cm}} = 271 \text{ kg/cm}^2$$

Costruendo il diagramma si ha:

$$\sigma_{\max} = 733,12 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_s \text{ (carico di sicurezza)}$$

Esercizio 32

Dimensionare la sezione di un pilastro non snello (1) presso inflesso, sollecitato in punta da un carico verticale di 6 t e uno orizzontale di 3t.

(1) Per i pilastri snelli, come si vedrà in un esercizio successivo, bisogna introdurre nel calcolo un coefficiente ω (maggiore di uno) per cui viene moltiplicato N . Tale coefficiente è in funzione della lunghezza del pilastro, del tipo di vincolo e del giratore minimo della sezione.

Si cerca dapprima, mediante i diagrammi, la sezione più sollecitata. Essa è la sezione all'incastro, in cui si ha $M_f = 9 \text{ tm}$, $T = -3$ e $N = 6$. Trascurando il taglio, tale sezione è compressa da N ed inflessa da M_f . Si calcola ora l'eccentricità:

$$e = \frac{M_f}{N} = 1,5 \text{ m}$$

che è molto forte e quindi la sollecitazione di flessione è più importante di quella di compressione. La tensione massima totale è data da

$$\sigma = \frac{N}{A} \omega \pm \frac{M}{W}$$

dove ω è un coefficiente dovuto al carico di punta che per ora si trascura ($\omega = 1$). Per rapidità di calcolo si stima il contributo dovuto al carico e si assume il σ di sicurezza a 1300 kg/cm^2 anziché 1400 kg/cm^2 , avendo considerato che il non tener conto di $\sigma = \frac{N}{A}$ comporta una di-

minuzione di σ_0 di 100 kg/cm^2 . Si dimensiona ora il profilato con il solo momento flettente, tenendo naturalmente presente che verrà disposto in modo da reagire alla sollecitazione con l'asse d'inerzia più elevata.

$$W_x = \frac{M}{\sigma_0 - 100 \text{ kg/cm}^2}$$

$$W_x = \frac{9 \cdot 10^5}{1300} = 700 \text{ cm}^3$$

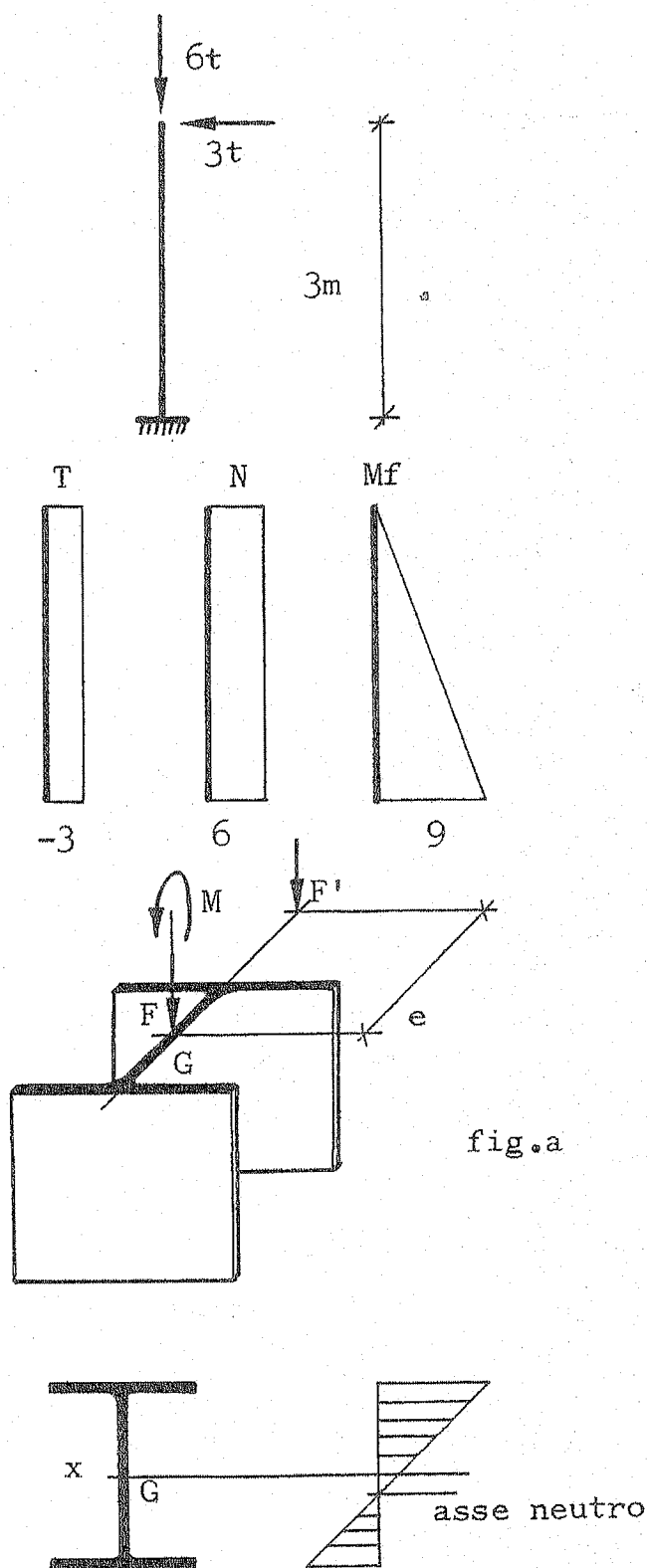
Dalle tabelle si ha per NP 32, $W_x = 781$.

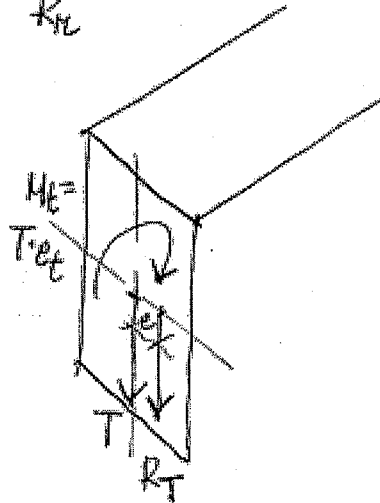
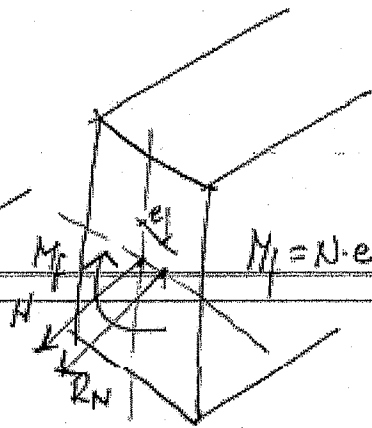
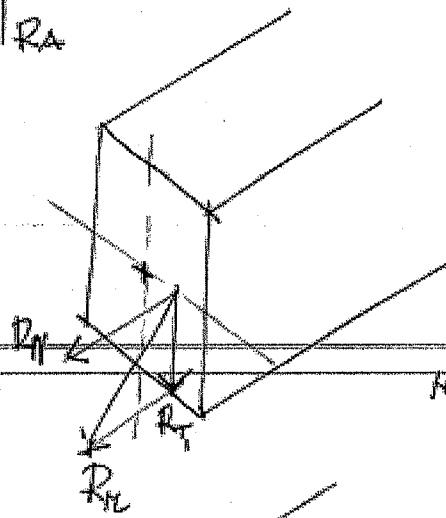
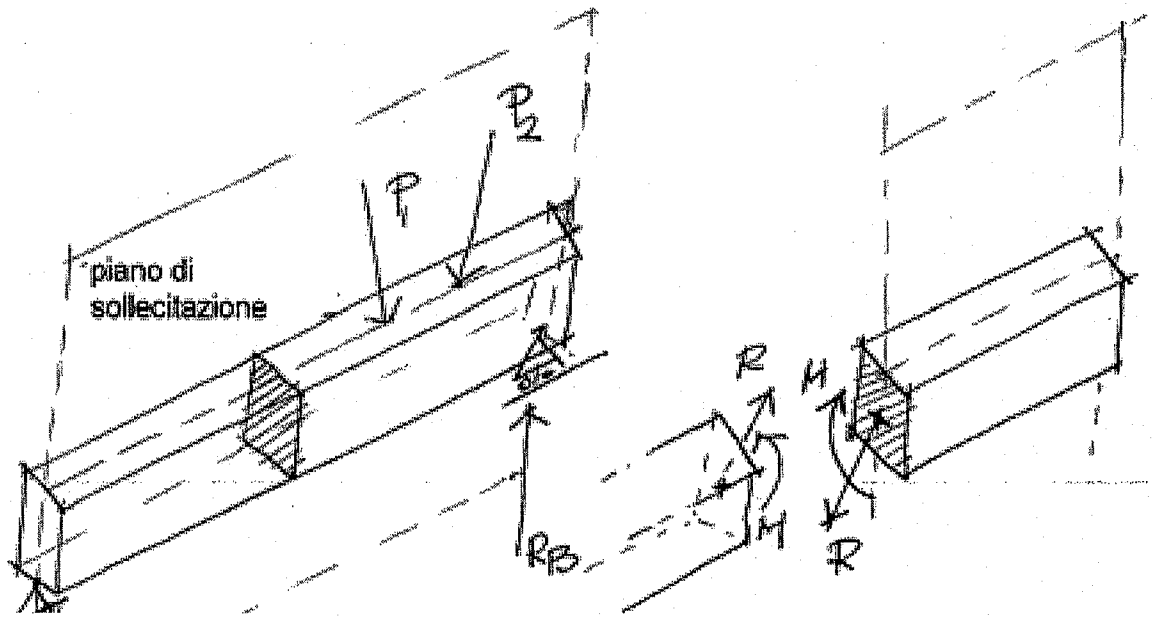
Verificando questa sezione si ha:

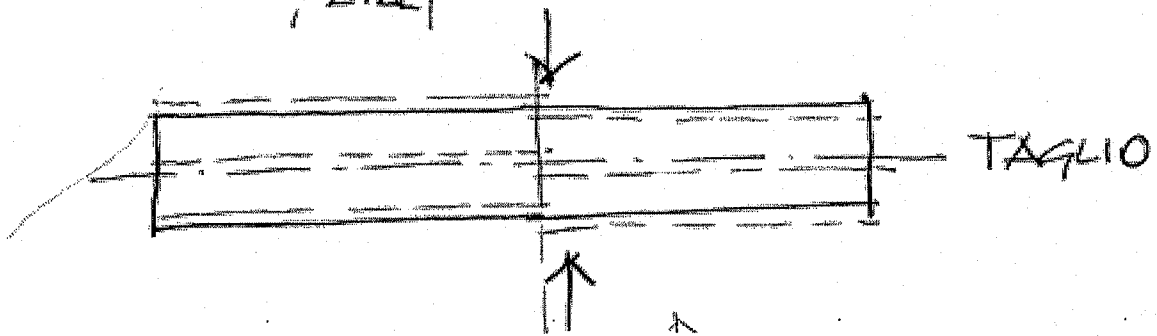
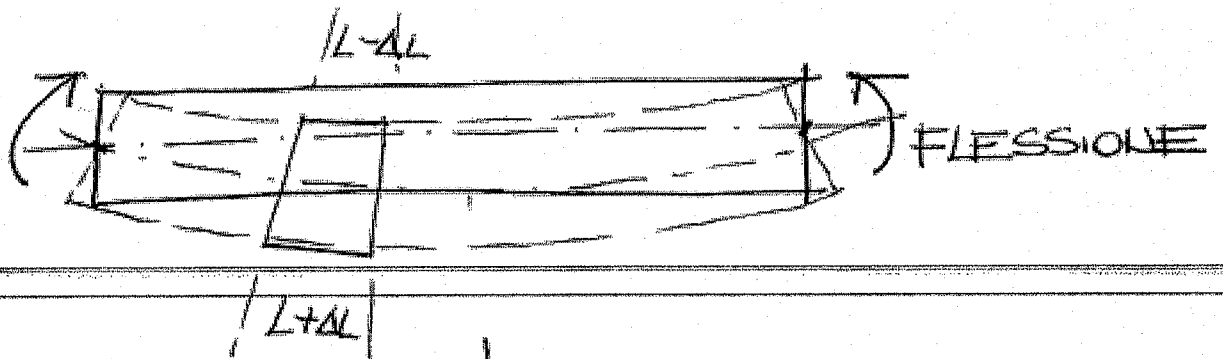
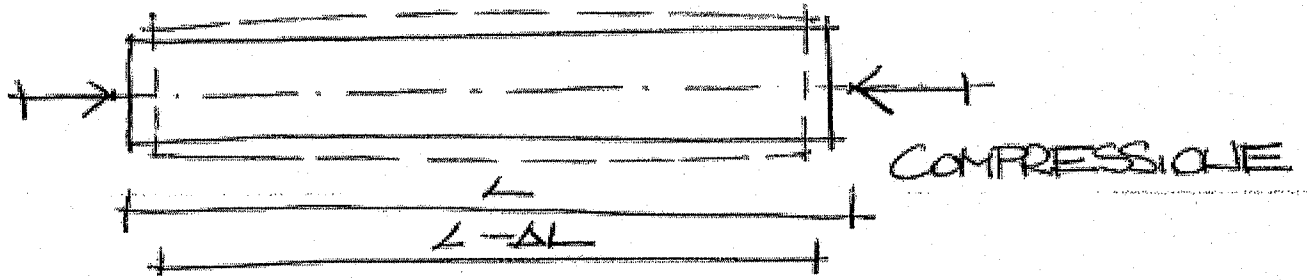
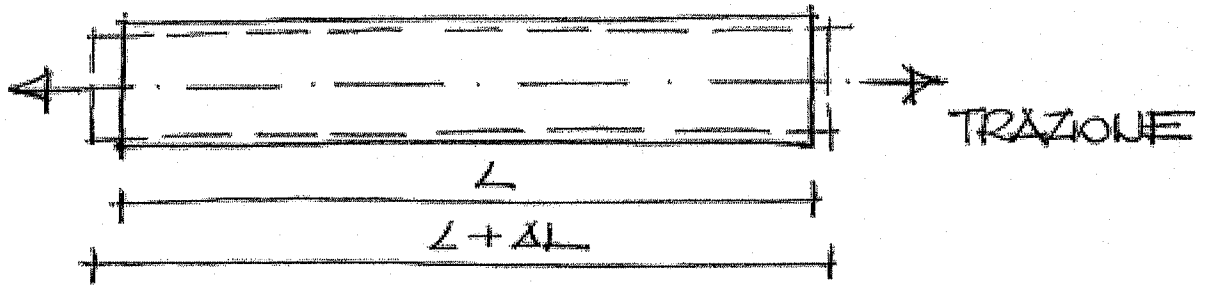
$$\text{NP 32 } (A = 77 \text{ cm}^2, W_x = 781 \text{ cm}^3)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_f}{W} = \frac{6 \cdot 10^3}{77} + \frac{9 \cdot 10^5}{781} = 78 + 1150 = 1228 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0$$

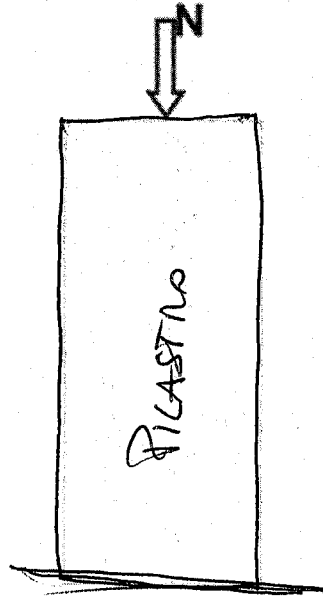
(sezione accettabile).







Si verifichi un pilastro a sezione rettangolare (30 cm x 40 cm), realizzato in calcestruzzo non armato, avente una tensione ammissibile pari a $\sigma_{am} = 8,5 \text{ N/mm}^2$. Tale pilastro è soggetto ad uno sforzo normale di compressione N pari a 1300 kN. Nel caso in cui la verifica non sia soddisfatta, si riprogetti la sezione del pilastro.



$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1300 \text{ KN}}{30 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}} = \frac{1300000 \text{ N}}{1200 \text{ cm}^2} = 1083,3 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 10,83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$\sigma > \sigma_{am}$: VERIFICA NON SODDISFATTA, poiché la tensione ottenuta supera quella ammissibile.

Si procede dunque ad un nuovo dimensionamento. Si ricava il valore minimo dell'area del pilastro scrivendo la formula di progetto: $A_{\text{min}} = \frac{N}{\sigma_{am}}$

ATTENZIONE : Le tensioni ammissibili dei materiali variano in base alla natura di questi ultimi (nel caso di calcestruzzo è in funzione della classe di resistenza) e in relazione al tipo di sollecitazione.

$$A_{\min} = \frac{N}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{1.300.000 \text{ N}}{8,5 \text{ N/mm}^2} = 152.941 \text{ mm}^2 = 1529,41 \text{ cm}^2$$

Fixata una delle due dimensioni pari a 30 cm, l'altra sarà pari a:

$$A = b \cdot h \Rightarrow b = \frac{A}{h} \rightarrow \frac{1529,41 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}} = 50,98 \text{ cm}$$

Il valore ottenuto è approssimato per eccesso (fino ad ottenere un multiplo di 5):

$$50,98 \text{ cm} \approx 55,00 \text{ cm}$$

Effettuiamo nuovamente la verifica, che questa volta sarà ovviamente soddisfatta:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1.300.000 \text{ N}}{30 \text{ cm} \cdot 55 \text{ cm}} = 787,88 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 7,88 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_{\text{adm}}$$

$$8,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

RESISTENZA DEI MATERIALI - SCHEDA DI LEZIONE

Abbandonando l'ipotesi di corpo rigido, una qualsiasi struttura vincolata, sottoposta a delle forze esterne, per l'effetto di tali forze e delle reazioni vincolari si deforma. Tali deformazioni che tendono ad allungare o ad accorciare o a fare scorrere il materiale, fanno nascere all'interno del materiale delle reazioni elastiche (TENSIONI INTERNE) che contrastano le deformazioni. Ad una situazione di sollecitazione esterna si oppone uno stato di tensione interna.

SOLLECITAZIONI ESTERNE: sono le azioni compiute dall'insieme dei carichi esterni e delle reazioni vincolari.

DEFORMAZIONE: è la variazione di forma della struttura causata dalle sollecitazioni esterne.

TENSIONI UNITARIE INTERNE: sono forze di reazione elastica che nascono in ogni punto all'interno del materiale, tendenti ad opporsi alla deformazione; vengono dette unitarie perché sono riferite all'unità di superficie (1 mm^2).

In generale, le tensioni interne hanno direzione qualsiasi, ma si può pensare di scomporre ogni tensione in due componenti: una perpendicolare (normale) al piano della sezione della struttura, l'altra secondo il piano della sezione.

TENSIONI NORMALI: sono le componenti delle tensioni perpendicolari al piano della sezione, tendenti ad opporsi agli allungamenti/accorciamenti; vengono indicate con la lettera greca σ (sigma) e hanno l'unità di misura di una forza su una superficie (N/mm^2).

TENSIONI TANGENZIALI: sono le componenti delle tensioni che giacciono sul piano della sezione, tendenti ad opporsi agli scorrimenti; vengono indicate con la lettera greca τ (tau) e hanno l'unità di misura di una forza su una superficie (N/mm^2).

LEGGE DI HOOKE: le deformazioni sono proporzionali alle forze che le hanno prodotte.

CONDIZIONI DI VALIDITÀ: la legge di Hooke esprime un legame di tipo lineare (equazione di una retta) tra deformazioni e tensioni interne, ma perché sia valida deve accadere.

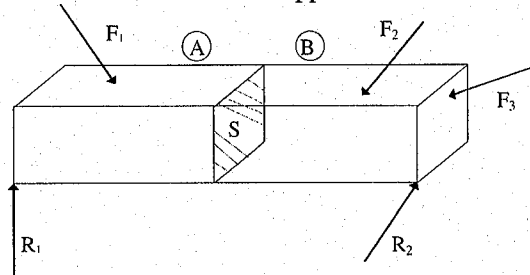
- il materiale deve lavorare in regime elastico proporzionale, cioè al cessare dei carichi che hanno prodotto la deformazione, riprende la configurazione indeformata, quindi non devono esserci deformazioni permanenti nel materiale;
- il materiale deve essere omogeneo, cioè presenta in ogni punto le stesse caratteristiche;
- il materiale deve essere isotropo, cioè avere le stesse caratteristiche in qualsiasi direzione.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: l'effetto prodotto da più forze è equivalente alla somma degli effetti prodotti dalle singole forze agendo separatamente.

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONI: sono gli effetti, in ogni sezione della struttura, prodotti dalle sollecitazioni esterne; possono essere considerate come le azioni (forze generalizzate: forze e momenti) trasmesse attraverso una sezione generica S di una delle parti della struttura idealmente tagliata lungo la sezione S per garantire l'equilibrio di ogni singola parte.

TRAVE: solido di materiale elastico, omogeneo, isotropo, generato dalla traslazione lungo un asse di una figura piana di forma qualsiasi, di area costante o gradualmente variabile. La trave è il modello di calcolo utilizzato nella verifica o nel progetto di una qualsiasi struttura in cui la misura di una delle dimensioni è prevalente rispetto alle altre due.

CASO SPAZIALE: le forze applicate alla struttura giacciono su piani diversi.



Immaginiamo di spezzare idealmente la struttura lungo la sezione S ottenendo i due tronchi A e B. Poiché la struttura nel complesso è in equilibrio, anche ogni sua parte lo deve essere; in particolare il tronco A da solo sarà in equilibrio se aggiungiamo le azioni che, lungo la sezione S, il tronco B trasmette al tronco A. Tali azioni sono proprio le caratteristiche della sollecitazione che nel caso spaziale sono 6 (3 forze + 3 momenti):

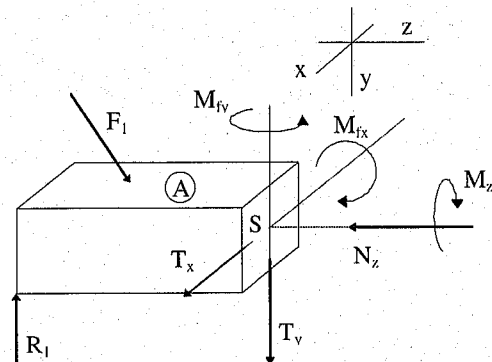
$$N_z, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$$

N_z sforzo normale diretto lungo l'asse della trave.

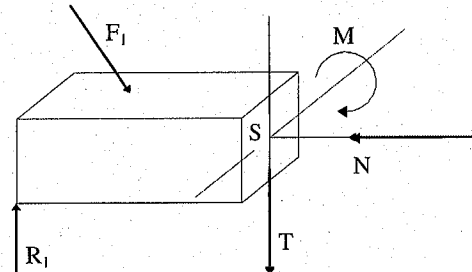
T_x, T_y sforzi di taglio diretti lungo gli assi tangenti al piano della sezione.

M_x, M_y momenti flettenti che provocano inflessioni della struttura sui piani verticale e orizzontale.

M_z momento torcente che provoca scorrimenti angolari tra le sezioni.



CASO PIANO: le forze applicate alla struttura giacciono tutte sullo stesso piano contenente l'asse della trave, per esempio quello verticale contenente l'asse della trave. In questo caso le caratteristiche della sollecitazione sono 3 (2 forze + 1 momento): N, T, M.

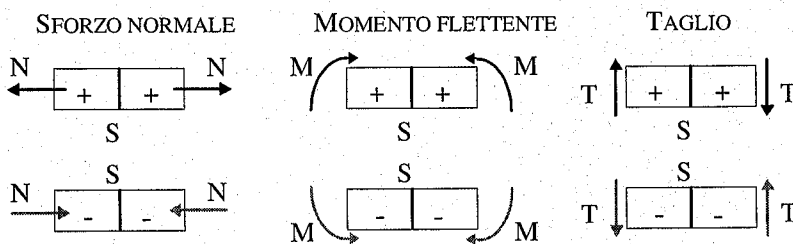


N SFORZO NORMALE

T SFORZO DI TAGLIO

M MOMENTO FLETTENTE.

CONVENZIONE SUI SEGNI: viene adottata la seguente convenzione sui segni delle caratteristiche delle sollecitazioni.



Esempio: guardando a destra della sezione considerata S si ha: sforzo normale positivo se la forza ha verso che si allontana dalla sezione; momento flettente positivo se ha verso antiorario; taglio positivo se la forza ha verso verso il basso.

Guardando a sinistra della sezione considerata S si ha: sforzo normale negativo se la forza ha verso che si avvicina dalla sezione; momento flettente negativo se ha verso antiorario; taglio negativo se la forza ha verso verso il basso.

CARICO UNITARIO DI ROTTURA: è la tensione che provoca la rottura del materiale quando viene sottoposto a trazione o a compressione; si misura in N/mm^2 .

CARICO UNITARIO DI SICUREZZA: è la massima tensione a cui il materiale può essere sottoposto entro i limiti di sicurezza. Si calcola dividendo il carico unitario di rottura per un coefficiente chiamato grado di sicurezza:

$$\sigma_{am.} = \frac{\sigma_R}{a} \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \begin{cases} a = 2,5 \div 3 & \text{per acciai e leghe leggere prodotti con lavorazioni plastiche} \\ a = 3 \div 4 & \text{per acciai prodotti per fusione} \\ a = 5 \div 8 & \text{per ghisa e materiali fragili prodotti per fusione.} \end{cases}$$

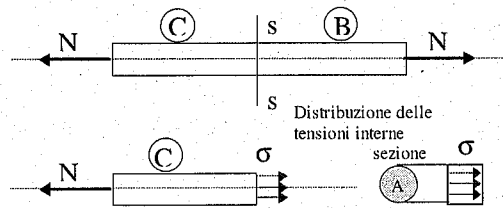
La tensione massima ammissibile σ_{am} è il riferimento per i calcoli di verifica e di progetto.

GRADO DI SICUREZZA $a = \frac{\sigma_R}{\sigma_{am.}}$: è il rapporto tra il carico unitario capace di provocare la rottura o intollerabili deformazioni della struttura e il carico unitario massimo prevedibile su di essa.

SFORZO NORMALE

Un corpo è sollecitato a sforzo normale quando le forze agenti su di esso (carichi esterni + reazioni vincolari) hanno la direzione dell'asse del corpo. Nel caso di forze che provocano allungamenti lo sforzo normale si chiama **TRAZIONE** (caratteristica della sollecitazione assunta convenzionalmente positiva); nel caso di forze che provocano accorciamenti lo sforzo normale si chiama **COMPRESSIONE** (caratteristica della sollecitazione assunta convenzionalmente negativa).

Nello sforzo normale la distribuzione delle deformazioni è uniforme (considerando valida l'ipotesi di sezioni che si conservano piane) e quindi è uniforme anche la distribuzione delle tensioni interne sulla sezione. La forma della sezione non ha influenza sul calcolo delle deformazioni e delle tensioni.



Le tensioni interne sono solo di tipo σ e con le forze esterne applicate nel tronco C formano un sistema di forze equilibrato; quindi per l'equilibrio del tronco A si ha: **EQUAZIONE DI STABILITÀ**

$$N = \sigma \cdot A \begin{cases} N \text{ sollecitazione di sforzo normale (N)} \\ \sigma \text{ tensione normale interna } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \\ A \text{ area della sezione resistente (mm}^2) \end{cases}$$

CALCOLO DI VERIFICA

Sono note le dimensioni geometriche (sezione) e si accerta per confronto che la tensione effettiva sulla sezione risulti entro i limiti di sicurezza, fissati con il carico unitario ammissibile.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{am.} \begin{cases} N \text{ sforzo normale nella sezione più sollecitata (N)} \\ A \text{ area della sezione resistente (mm}^2) \\ \sigma \text{ tensione interna nella sezione più sollecitata } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \end{cases}$$

CALCOLO DI PROGETTO

Scelto il materiale della struttura si calcola l'area minima necessaria (condizione di economia) imponendo alle tensioni interne il massimo valore ammissibile (condizione di sicurezza).

$$A = \frac{N}{\sigma_{am.}} \begin{cases} N \text{ sforzo normale nella sezione più sollecitata (N)} \\ \sigma_{am.} \text{ tensione massima ammissibile per il materiale utilizzato } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \\ A \text{ area minima della sezione resistente (mm}^2) \end{cases}$$

CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE

Si tratta di allungamenti nel caso di trazione e di accorciamenti nel caso di compressione. Per la legge di Hooke nel caso di tensioni normali si ha:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} E \text{ modulo di elasticità longitudinale del materiale } \left(\frac{N}{\text{mm}^2} \right) \\ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \text{ allungamento unitario} \end{array} \right.$$

ma si ha:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \frac{N}{A} \\ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

La deformazione è proporzionale allo sforzo normale e alla lunghezza iniziale; è inversamente proporzionale all'area della sezione resistente e al modulo di elasticità longitudinale del materiale.

PROCEDURA PER IL CALCOLO, SEZIONE PER SEZIONE, DELLA SOLLECITAZIONE DI SFORZO NORMALE (DIAGRAMMA DI SOLLECITAZIONE DI SFORZO NORMALE).

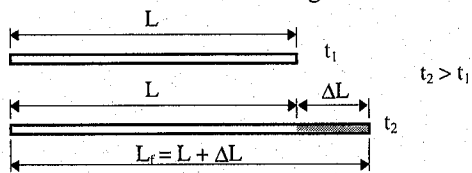
- 1) Si calcolano le reazioni vincolari.
- 2) Si calcola per ogni sezione il valore dello sforzo normale considerando tutte e solo le forze che danno sforzo normale (forze con linea d'azione coincidente o parallela all'asse della struttura) che stanno a destra o a sinistra della sezione considerata; per le sezioni dove sono applicate forze, è necessario calcolare lo sforzo normale in una sezione immediatamente a sinistra e in una immediatamente a destra del punto di applicazione della forza.
- 3) Si disegna il diagramma della caratteristica della sollecitazione di sforzo normale riportando su una linea di riferimento parallela all'asse della struttura i valori dello sforzo normale calcolati; si assume, convenzionalmente, positivo e si rappresenta sopra la linea di riferimento lo sforzo normale di trazione; si assume, convenzionalmente, negativo e si rappresenta sotto la linea di riferimento lo sforzo normale di compressione.

COMPRESSIONE PER DILATAZIONE TERMICA LINEARE IMPEDITA

DILATAZIONE TERMICA LINEARE: è il fenomeno fisico per cui un corpo monodimensionale se riscaldato si allunga e se raffreddato si accorcia.

COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA LINEARE: è l'allungamento che subisce una barretta di lunghezza unitaria quando la sua temperatura aumenta di 1 °C.

Ogni materiale ha un suo coefficiente di dilatazione termica lineare.



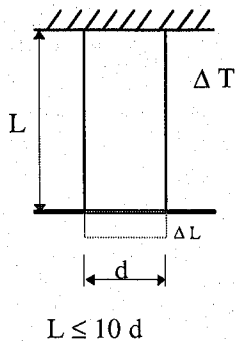
MATERIALE	COEFF. DILATAZIONE TERMICA LINEARE
acciaio	$a = 0,000012 \text{ 1/}^\circ\text{C}$
rame	$a = 0,000017 \text{ 1/}^\circ\text{C}$
alluminio	$a = 0,000024 \text{ 1/}^\circ\text{C}$

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L \text{ allungamento o accorciamento } \text{ mm} \\ \alpha \text{ coeff. dilatazione termica lineare } \frac{\text{mm}}{\text{mm}^\circ\text{C}} \\ L \text{ lunghezza iniziale } \text{ mm} \\ t_2 \text{ temperatura finale } \text{ }^\circ\text{C} \\ t_1 \text{ temperatura iniziale } \text{ }^\circ\text{C} \end{array} \right. \quad L_f = L + \Delta L$$

L'allungamento causato da un aumento di temperatura ΔT vale:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$



ma poiché tale allungamento risulta impedito, si può paragonare ad un accorciamento causato da una sollecitazione di sforzo normale di compressione N :

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \quad \text{essendo uguali i primi membri, saranno uguali i secondi membri}$$

$$\frac{N \cdot L}{E \cdot A} = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad \text{dividendo ambo i membri per } L$$

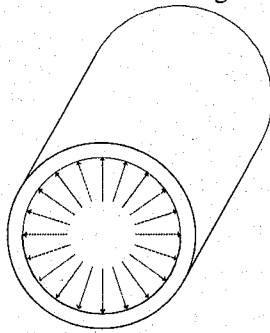
$$\frac{N}{E \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T \Rightarrow \frac{N}{A} = \alpha \cdot E \cdot \Delta T \quad \text{ma} \quad \frac{N}{A} = \sigma \Rightarrow$$

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T \quad \text{tensione normale di compressione dovuta a } \Delta T$$

Per la verifica deve essere $\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T \leq \sigma_{am}$.

RECIPIENTI CILINDRICI IN PRESSIONE

Sia p la pressione interna del recipiente in N/mm^2 ;
 D il suo diametro interno in mm;
 s lo spessore del recipiente in mm;
 L la sua lunghezza in mm.



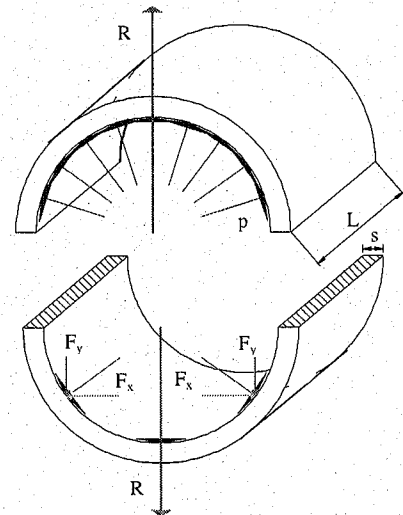
Le forze di pressione hanno direzione perpendicolare alla superficie su cui agiscono e sono dirette verso l'esterno.

Consideriamo un piano longitudinale diametrale qualsiasi; tale piano divide in due parti simmetriche il recipiente cilindrico.

Scomponendo tutte le forze secondo le direzioni verticale e orizzontale (nel caso di piano diametrale

orizzontale), si nota che per la simmetria della struttura, le forze orizzontali si annullano.

La FORZA che tende a staccare i due semicilindri è data dalla somma delle forze verticali che vale:



$$R = \sum F_y = p \cdot D \cdot L$$

La SEZIONE RESISTENTE che si oppone a tale distacco vale: $A = 2 (s L)$

La TENSIONE cui è sottoposto il materiale del recipiente vale:

$$\sigma = \frac{R}{A} = \frac{p \cdot D \cdot L}{2 \cdot s \cdot L} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot s}$$

$$\text{Per la verifica deve essere: } \sigma = \frac{p \cdot D}{2 \cdot s} \leq \sigma_{am}$$

$$\text{Per il progetto si calcola: } s = \frac{p \cdot D}{2 \cdot \sigma_{am}}$$

Per pressioni non molto elevate, il valore di s calcolato risulta molto piccolo e ciò può provocare deformazioni nella messa in opera; i manuali tecnici consigliano di aggiungere al valore s calcolato

1÷3 mm per recipienti in acciaio

6÷10 mm per recipienti in ghisa o bronzo.

FLESSIONE RETTA

Una struttura è soggetta a flessione semplice quando i carichi esterni sono costituiti da due coppie uguali e opposte di momento M giacenti in un piano che contiene l'asse longitudinale della struttura.

PIANO DI SOLLECITAZIONE: è il piano su cui giacciono i carichi che provocano flessione.

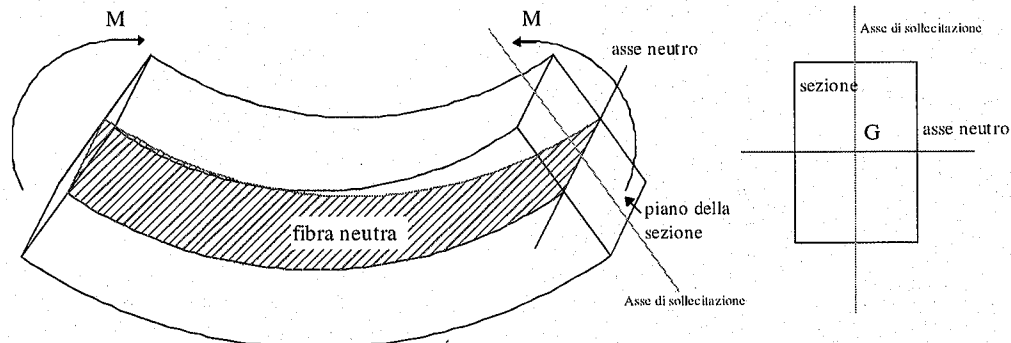
ASSE DI SOLLECITAZIONE: è la retta intersezione tra il piano di sollecitazione e il piano della sezione della struttura.

FLESSIONE RETTA: se la sezione ha un asse di simmetria e l'asse di sollecitazione coincide con esso. La sollecitazione di flessione provoca un incurvamento della trave; le sezioni ruotano, restando piane; le fibre in parte si allungano, in parte si accorciano, quindi ci sarà uno strato che non subirà alcuna deformazione.

STRATO NEUTRO: è lo strato di fibre che non subisce deformazioni.

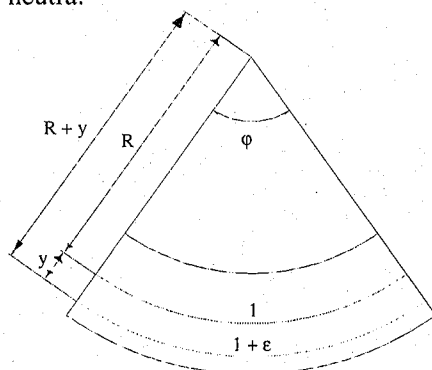
ASSE NEUTRO: è l'asse generato dall'intersezione dello strato neutro con il piano delle sezioni; attorno a tale asse ruota ogni sezione e le fibre collocate su di esso non subiscono né allungamenti né accorciamenti.

Nella flessione retta, asse di sollecitazione e asse neutro sono perpendicolari e si intersecano nel baricentro della sezione.



DEFORMAZIONI

L'incurvamento della trave fa sì che il suo asse e ogni sua fibra diventino archi di circonferenza. Consideriamo un tratto di trave deformata di lunghezza unitaria (la lunghezza si mantiene unitaria solo lungo il piano neutro). Sia y la distanza di una fibra generica dalla fibra neutra.



$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{R} \\ \varphi &= \frac{1+\varepsilon}{R+y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1+\varepsilon}{R+y} = \frac{1}{R} ; 1+\varepsilon = \frac{R+y}{R} ; \varepsilon = \frac{R+y}{R} - 1$$

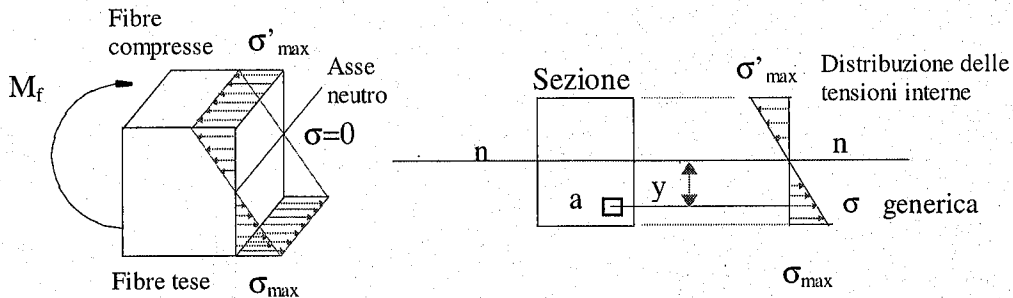
$$\varepsilon = \frac{y}{R}$$

La deformazione unitaria di allungamento o accorciamento delle varie fibre è proporzionale alla distanza y dall'asse neutro e alla curvatura $1/R$ dell'asse deformato della trave (LINEA ELASTICA).

TENSIONI

La sollecitazione di flessione provoca in ogni sezione tensioni normali (σ), verificandosi nella struttura deformazioni di allungamento (trazione) e deformazioni di accorciamento (compressione). Dette tensioni sono massime negli strati più lontani dall'asse neutro perché sono massime le deformazioni e nulle in corrispondenza dell'asse neutro perché sono nulle le deformazioni.

Per l'equilibrio tra tensioni interne e sollecitazioni si ha:



Per l'equilibrio alla traslazione:

$$\sum \sigma \cdot a = 0 \quad \text{ma} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{R} \quad \text{sostituendo}$$

$$\sum E \cdot \frac{y}{R} \cdot a = 0 \quad ; \quad \frac{E}{R} \cdot \sum y \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum y \cdot a = 0 \quad \text{ciò vuol dire che il momento statico della sezione rispetto all'asse neutro vale zero, quindi l'asse neutro è baricentrico.}$$

Per l'equilibrio alla rotazione:

$$\sum \sigma \cdot a \cdot y = M \quad \text{ma} \quad \sigma = E \cdot \frac{y}{R} \quad \text{sostituendo}$$

$$\sum E \cdot \frac{y}{R} \cdot a \cdot y = M \quad ; \quad \frac{E}{R} \cdot \sum a \cdot y^2 = M \quad \text{ma} \quad \sum a \cdot y^2 = J_n \quad \text{momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro}$$

$$\frac{E}{R} \cdot J_n = M \quad ; \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot J_n} \quad \text{equazione di deformazione ; sostituendo tale espressione si ha:}$$

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{R} = E \cdot y \cdot \frac{M}{E \cdot J_n} = M \cdot \frac{y}{J_n}$$

$$\sigma = M \cdot \frac{y}{J_n} \quad \text{equazione che esprime il valore della tensione in un punto della sezione a distanza } y \text{ dall'asse neutro}$$

$$\sigma_{\max} = M \cdot \frac{y_{\max}}{J_n} \quad \text{tensione massima nella sezione}$$

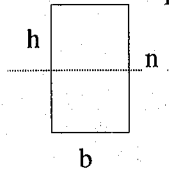
MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE: è dato dal rapporto tra il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro e la distanza dall'asse neutro delle fibre più tese o più compresse: dipende solo dalla geometria della sezione ed ha le dimensioni di una lunghezza al cubo (mm^3).

$$W_f = \frac{J_n}{y_{\max}} \quad (\text{mm}^3)$$

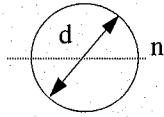
Quindi

$$\sigma_{\max} = M \cdot \frac{y_{\max}}{J_n} = \frac{M}{W_f}$$

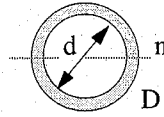
Per le sezioni più ricorrenti si calcolano:



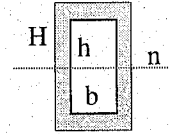
$$W_f = \frac{b \cdot h^2}{6}$$



$$W_f = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$



$$W_f = \frac{\pi \cdot (D^3 - d^3)}{32}$$



$$W_f = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6H}$$

CALCOLO DI VERIFICA

Sono note le dimensioni geometriche (sezione e lunghezza) e si accerta per confronto che la tensione effettiva sulla sezione risulti entro i limiti di sicurezza, fissati con il carico unitario ammissibile.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_f} \leq \sigma_{am.} \quad \text{tensione massima di trazione}$$

$$\sigma'_{\max} = \frac{M}{W'_f} \leq \sigma'_{am.} \quad \text{tensione massima di compressione}$$

CALCOLO DI PROGETTO

Scelto il materiale della struttura si calcola l'area minima necessaria (condizione di economia) imponendo alle tensioni interne il massimo valore ammissibile (condizione di sicurezza).

$$W_f = \frac{M}{\sigma_{am.}} \quad \text{noto il valore di } W_f \text{ si calcolano le dimensioni della sezione}$$

Per la verifica e per il progetto si considera sempre la sezione più sollecitata, cioè la sezione dove è massimo il momento flettente. Quindi risulta necessario conoscere quanto vale la sollecitazione di momento flettente in ogni sezione della struttura. Ciò è possibile rappresentando il diagramma della sollecitazione di momento flettente della struttura.

PROCEDURA PER IL CALCOLO, SEZIONE PER SEZIONE, DELLA SOLLECITAZIONE DI MOMENTO FLETTENTE (DIAGRAMMA DI SOLLECITAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE).

- 1) Si calcolano le reazioni vincolari.
- 2) Si calcola per ogni sezione il valore del momento flettente considerando tutte e solo le forze che danno momento che stanno a destra o a sinistra della sezione considerata; per le sezioni dove sono applicati momenti, è necessario calcolare il momento flettente in una sezione immediatamente a sinistra e in una immediatamente a destra del punto di applicazione della coppia.
- 3) Si disegna il diagramma della caratteristica della sollecitazione di momento flettente riportando su una linea di riferimento parallela all'asse della struttura i valori dei momenti calcolati; si assume, convenzionalmente, positivo e si rappresenta sotto la linea di riferimento il momento flettente che tende le fibre inferiori; si assume, convenzionalmente, negativo e si rappresenta sopra la linea di riferimento il momento flettente che comprime le fibre superiori.

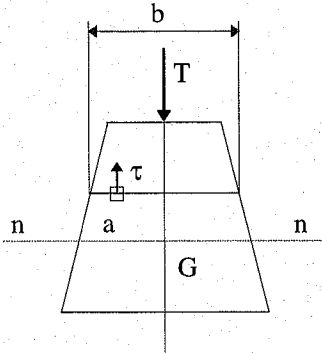
TAGLIO

Si ha sollecitazione di taglio quando sulla struttura sono applicate forze con direzione perpendicolare al suo asse, giacenti sul piano della sezione e passanti per il suo baricentro. La sollecitazione di taglio produce uno scorrimento (traslazione) fra sezioni contigue. Le tensioni interne, dovendo opporsi a tale deformazione, giacciono sul piano della sezione, quindi sono delle tensioni tangenziali τ . La sollecitazione di taglio è normalmente accompagnata dalla flessione.

Considerata una sezione qualsiasi di una struttura soggetta a taglio T , per l'equilibrio alla traslazione verticale deve accadere che

$$\sum \tau \cdot a = T$$

Si dimostra che le tensioni interne τ lungo una corda di lunghezza b parallela all'asse neutro, hanno valore



$$\tau = \frac{T \cdot S_n^*}{b \cdot J_n} \quad \text{EQUAZIONE DI STABILITA'}$$

τ tensione tangenziale sulle areole "a" della sezione lungo la corda di lunghezza b.

T sollecitazione di taglio nella sezione.

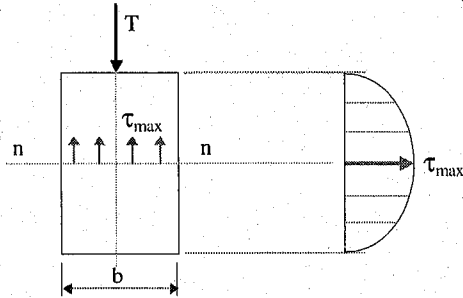
S_n^* momento statico, rispetto all'asse neutro, della parte di sezione che sta al di sopra o al di sotto della corda considerata.

b larghezza della sezione all'altezza dell'areola "a".

J_n momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

Le tensioni non sono distribuite in modo uniforme sulla sezione; la distribuzione delle τ sulla sezione è di tipo parabolico per sezioni rettangolari e circolari. Si dimostra che per

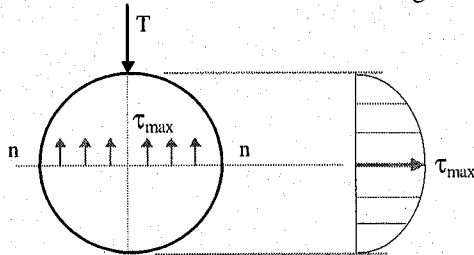
SEZIONE RETTANGOLARE: la tensione di taglio è massima lungo l'asse neutro e si dimostra che vale



$$\tau_{\max} = \frac{3 T}{2 A} \quad \left\{ \begin{array}{l} T \text{ sforzo di taglio nella sezione (N)} \\ A \text{ area della sezione resistente (mm}^2) \end{array} \right.$$

$$\frac{T}{A} = \tau_{\text{media}} \quad \text{tensione media di taglio nella sezione}$$

SEZIONE CIRCOLARE: la tensione di taglio è massima lungo l'asse neutro e si dimostra che vale



$$\tau_{\max} = \frac{4 T}{3 A} \quad \left\{ \begin{array}{l} T \text{ sforzo di taglio nella sezione (N)} \\ A \text{ area della sezione resistente (mm}^2) \end{array} \right.$$

$$\frac{T}{A} = \tau_{\text{media}} \quad \text{tensione media di taglio nella sezione}$$

Le tensioni da taglio hanno generalmente un'importanza secondaria in presenza di altre tensioni, per cui non è in base ad essa che vengono dimensionati gli organi meccanici. E' sufficiente una verifica confrontando la τ_{\max} con la $\tau_{am.}$.

$$\tau_{\max} \leq \tau_{am.} \quad \text{con} \quad \tau_{am.} = \frac{\sigma_{am.}}{\sqrt{3}}$$

Nei pochi casi di strutture soggette a taglio puro (chiodature, collegamenti con linguetta), si introduce l'ipotesi semplificativa di distribuzione uniforme delle tensioni da taglio sulla sezione, ciò

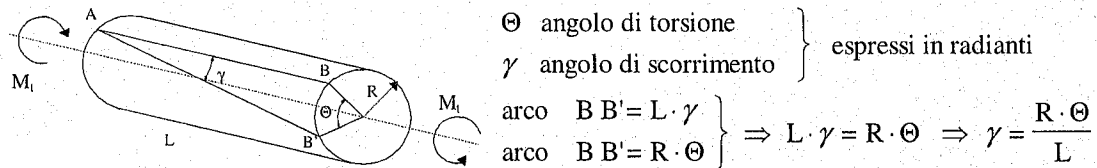
equivale a considerare la $\tau_{\text{media}} = \frac{T}{A}$ e quindi per la VERIFICA: $\tau_{\text{media}} = \frac{T}{A} \leq \tau_{am.}$

$$\text{PROGETTO:} \quad A = \frac{T}{\tau_{am.}}$$

TORSIONE NELLE SEZIONI CIRCOLARI PIENE E CAVE

Un solido è soggetto a torsione quando su di esso sono applicati, alle estremità, momenti uguali e opposti attorno al suo asse longitudinale e quindi giacenti sul piano della sezione.

DEFORMAZIONE: le sezioni ruotano una rispetto all'altra attorno all'asse longitudinale dell'angolo di torsione Θ e si mantengono piane (vale solo per sezioni circolari piene e cave), mentre ogni fibra si deforma secondo un tratto di elica.

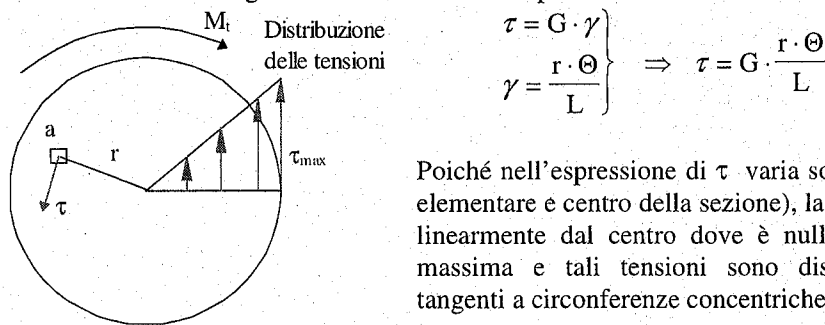


TENSIONI: dovendo opporsi a deformazioni di scorrimento, giacciono sul piano della sezione, quindi sono delle tensioni tangenziali τ e poiché le deformazioni crescono dal centro alla periferia, le tensioni saranno massima lungo il bordo della sezione e nulle sul centro della sezione.

Dalla legge di Hooke per tensioni tangenziali

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{con } G = \frac{2}{5} \cdot E \quad \text{modulo di elasticità tangenziale } \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$$

Per una area unitaria generica della sezione "a" posta a distanza r dal centro si ha:



Poiché nell'espressione di τ varia solo r (distanza tra area "a" elementare e centro della sezione), la tensione tangenziale varia linearmente dal centro dove è nulla, fino al bordo, dove è massima e tali tensioni sono disposte secondo direzioni tangenti a circonferenze concentriche.

Per l'equilibrio alla rotazione

$$\sum \tau \cdot a \cdot r = M_t \quad \text{ma } \tau = G \cdot \frac{r \cdot \Theta}{L} \quad \text{sostituendo}$$

$$\sum G \cdot \frac{r \cdot \Theta}{L} \cdot a \cdot r = M_t ; \quad G \cdot \frac{\Theta}{L} \cdot \sum a \cdot r^2 = M_t \quad \text{ma } \sum a \cdot r^2 = J_p \quad \text{momento d'inerzia polare della sezione rispetto al suo baricentro}$$

$$G \cdot \frac{\Theta}{L} \cdot J_p = M_t ; \quad \Theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J_p} \quad \text{ANGOLO DI TORSIONE}$$

Si è visto che

$$\tau = G \cdot \frac{r \cdot \Theta}{L} \quad \text{ma } \Theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J_p} \quad \text{sostituendo}$$

$$\tau = G \cdot \frac{r}{L} \cdot \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J_p} ; \quad \tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p} \quad \text{EQUAZIONE DI STABILITÀ}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot r_{\max}}{J_p} = \frac{M_t \cdot R}{J_p} \quad \text{con R raggio della sezione}$$

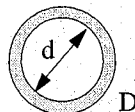
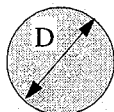
MODULO DI RESISTENZA A TORSIONE: è dato dal rapporto tra il momento d'inerzia polare della sezione rispetto al suo baricentro e il suo raggio: dipende solo dalla geometria della sezione ed ha l'unità di misura di una lunghezza al cubo (mm^3).

$$W_t = \frac{J_p}{R} \quad (\text{mm}^3)$$

Quindi

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot R}{J_p} = M_t \cdot \frac{R}{J_p} = \frac{M_t}{W_t}$$

Per le sezioni circolari piene e cave si calcolano:



$$W_t = \frac{J_p}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

$$W_t = \frac{J_p}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$$

CALCOLO DI VERIFICA

Sono note le dimensioni geometriche (sezione) e si accerta per confronto che la tensione massima sulla sezione risulti entro i limiti di sicurezza, fissati con il carico unitario ammissibile.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{\text{am.}} \quad \text{con} \quad \tau_{\text{am.}} = \frac{\sigma_{\text{am.}}}{\sqrt{3}}$$

CALCOLO DI PROGETTO

Scelto il materiale della struttura si calcola l'area minima necessaria (condizione di economia) imponendo alle tensioni interne il massimo valore ammissibile (condizione di sicurezza).

$$W_t = \frac{M_t}{\tau_{\text{am.}}} \quad \text{noto il valore di } W_t \text{, si calcola il diametro della sezione}$$

Per la verifica e per il progetto si considera sempre la sezione più sollecitata, cioè la sezione dove è massimo il momento torcente.

FLESSOTORSIONE NELLE SEZIONI CIRCOLARI PIENE E CAVE

E' la tipica sollecitazione composta cui sono sottoposti gli alberi che trasmettono potenza. Le sezioni del solido sono sottoposte contemporaneamente a tensioni σ normali dovute alla flessione e a tensioni tangenziali τ dovute alla torsione.

Da studi sulla elasticità dei materiali, si dimostra che è possibile calcolare una tensione normale ideale σ_{id} che è equivalente, cioè che ha gli stessi effetti, delle due tensioni agenti contemporaneamente.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Nel caso di sezioni resistenti circolari piene o cave, è noto che il modulo di resistenza a torsione è il doppio del modulo di resistenza a flessione $W_t = 2 W_f$. Da ciò è possibile calcolare un momento flettente ideale M_{fid} che ha gli stessi effetti del momento flettente e del momento torcente agenti

$$\text{contemporaneamente} \quad M_{fid} = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

Nota il momento flettente ideale, sia per la verifica che per il progetto, si procede esattamente come nel caso della flessione.

Gli spazi della casa

Gli spazi interni di ogni tipo di abitazione possono dividersi in due categorie, che chiameremo **spazi serventi** e **spazi serviti**. Gli spazi serventi sono gli ingressi, i corridoi e i disimpegni. Gli spazi serviti possono ancora suddividersi in due sottoclassi: spazi serviti **principali**: soggiorni, sale da pranzo, e camere da letto e spazi serviti **di servizio** che sono le cucine, i bagni, i gabinetti e i ripostigli.

La possibilità di sfruttare altri spazi non direttamente collegati all'abitazione, come le cantine, gli stenditoi e le autorimesse, aumenta la funzionalità dell'abitazione; al pari degli spazi inter-esterni, come i **loggiati** e le **terrazze**. In condizioni climatiche favorevoli, l'utilizzo di questi spazi inter-esterni, proprio della tradizione abitativa italiana, consente di diminuire, se non addirittura eliminare, quel senso di costrizione che spesso deriva dalla necessità di muoversi in uno spazio eccessivamente angusto.

Nell'abitazione moderna questa carenza di spazio è quasi sempre attestata; infatti, in seguito alla ricerca di un'economia di spazio, che si traduce in economia di costo e di gestione, si tende a ridurre al minimo gli spazi serventi. L'eliminazione di tanti corridoi inutili è perfettamente logica, a patto che questa quantità di spazio male utilizzato non sia totalmente eliminata, ma aggiunta come integrazione inter-esterna agli spazi serviti principali.

In pratica la tendenza attuale è quella di eliminare il più possibile i corridoi, e realizzare dei semplici disimpegni quando necessario. Il disimpegno è un volume, più piccolo possibile, nel quale si affacciano le porte di diverse stanze. Il suo scopo è simile a quello del corridoio, ma non è stretto e lungo come il primo, ma piuttosto di forma compatta.

L'ingresso e i disimpegni

Solitamente è presente un solo ingresso, (con ingresso non si intende la porta dalla quale si entra, ma bensì uno spazio che ci accoglie non appena entriamo a casa, sia noi che gli ospiti. Una porta del soggiorno che dà sulla terrazza non è un ingresso) tuttavia quando è previsto personale di servizio che vive permanentemente nell'abitazione, è consigliabile avere un secondo ingresso, detto di servizio, che comunica direttamente con la cucina.

Quest'eventualità è, però, sempre più rara, mentre aumentano i casi in cui un secondo ingresso all'abitazione è utile se direttamente comunicante con la camera-soggiorno, di un figlio non più in tenera età. In questo caso, l'ingresso indipendente conferisce a questo spazio carattere di sottoabitazione e un certo livello di privacy. Lo stesso discorso può essere

valido se la stanza indipendente è sfruttata come stanza degli ospiti o per il soggiorno saltuario di un parente.

Come già detto sopra, i corridoi tendono a sparire e gli orientamenti più attuali tendono invece a concepire organismi planimetrici nei quali:

1) I corridoi si trasformano in organismi più articolati, suddivisi in varie sezioni di differente larghezza e altezza, in modo da divenire vere e proprie appendici del soggiorno, dell'ingresso e/o della cucina. Oppure si predispone un grande soggiorno centrale, sfruttandolo per smistare gli accessi alle varie stanze.

Il soggiorno

E' lo spazio interno principale dell'abitazione, nel quale si articolano le relazioni reciproche del nucleo familiare.

L'elenco delle funzioni che si svolgono in un soggiorno è piuttosto vario: conversare, leggere, ricevere gli amici, scrivere, ascoltare la radio, la musica o la televisione. In ogni soggiorno si possono quindi enucleare vari gruppi:

- gruppo di conversazione principale, al quale sono dedicati i divani e le poltrone;
- gruppo di conversazione secondario, per il quale, in genere, possono bastare le sedie;
- gruppo di lettura, al quale occorre un tavolino
- gruppo di scrittura o di studio, che può utilizzare gli spazi del gruppo precedente;
- gruppo per il gioco degli adulti, il quale utilizza un tavolino di minori dimensioni, se disponibile;
- gruppo di ascolto e di visione.

Quest'ultima funzione del soggiorno è sempre più preponderante rispetto alle altre e può contribuire a ristabilire l'unità del nucleo familiare;

Tutti i sei gruppi descritti possono trovare sistemazione in un unico spazio.

La **stanza da gioco** o la **biblioteca** trovano la loro sistemazione indipendente dal soggiorno solo nei casi di espressa richiesta dell'utente che può permettersi questa spesa.

La superficie minima del soggiorno è di 14 mq.

Sala da pranzo

Nella casa borghese, la sala da pranzo era quasi sempre uno spazio a se stante, ma è stata giustamente la prima a essere sacrificata a causa della carenza di spazio e della mancanza di personale di servizio. I grandi **prandi**

di famiglia, sono d'altronde, sempre più rari e sempre più diffusa è l'abitudine di riunirsi in un locale pubblico.

Nelle case di abitazione in cui l'economia spaziale è un elemento dominante, al pranzo possono essere adibiti due ambienti:

a) un prolungamento dello spazio-cucina detto **tinello**; questo semplifica notevolmente le operazioni ai apparecchiatura e sparecchiatura della tavola, nonché la fatica del servizio;

b) una parte del soggiorno, convenientemente dimensionata. In questo caso, il tavolo da pranzo, utilizzato come tale solo durante i pasti, può essere adibito durante il giorno ad altre funzioni. Tuttavia, anche in questa sistemazione la comunicazione con la cucina deve essere la più rapida possibile, senza dislivelli. Ciononostante, è bene attrezzare la cucina affinché vi si possa svolgere, almeno la prima colazione o la merenda dei bambini.

Le dimensioni del tavolo da pranzo per N persone sono:

- per un tavolo rettangolare, 75-85 cm in larghezza, $60-70 \times (N-2)/2$ in lunghezza;
- per un tavolo rotondo, diametro $60-70 N/3,14$.

La cucina

Attualmente la dimensione delle cucine è più ridotta rispetto al passato, almeno quando questa è utilizzata solo per la preparazione dei cibi e si sfruttano i moderni elettrodomestici per ridurre ulteriormente la superficie.

In ogni categoria sociale la cucina è sempre concepita come una macchina funzionale, in cui la praticità della funzione domina su ogni altro aspetto, specialmente quello estetico.

In cucina si svolgono 4 operazioni principali:

- 1) conservazione
- 2) preparazione
- 3) cottura e servizio del cibo
- 4) lavaggio e asciugatura delle stoviglie

I tipi fondamentali di spazio-cucina derivano dai posizionamenti reciproci degli elementi necessari per le quattro operazioni suddette e sono:

- a) cucina in linea;
- b) cucina a L;
- c) cucina a due elementi in parallelo

d) cucina a U.

La disposizione più diffusa è la terza, poiché sembra consentire il massimo sfruttamento dello spazio; tuttavia, se pensiamo alla compresenza del tinello, è possibile studiare soluzioni diverse e migliori.

Inoltre, la normativa impone che la cucina sia dotata di una finestra o che sia munita di una finestra o di un impianto di aspirazione forzata, per allontanare i fumi e i vapori. Inoltre poiché c'è la presenza di fiamme libere è necessaria garantire una certa aerazione attraverso dei fori con delle bocchette, sempre aperti.

La camera da letto

La stanza da letto è adibita solitamente all'unica funzione del dormire e pertanto è sempre isolata dal resto dell'abitazione, salvo i casi, piuttosto rari, della casa concepita per un'unica persona.

Oltre all'ovvia suddivisione tra camera e camera, è necessaria una divisione netta tra la **zona-notte, che può contenere un bagno**, e la parte restante dell'abitazione, in modo da garantire la necessaria intimità a quest'area dell'abitazione.

Talvolta, però, si preferisce lasciare una stanza da notte nella zona giorno, possibilmente con un ingresso separato, per destinarla a un figlio adulto, che possa così avere la sua indipendenza; questo spesso comporta anche la presenza di un gabinetto, destinato quasi esclusivamente a questa stanza.

Nelle camere per i giovani, deve essere previsto lo spazio per lo studio con un tavolinetto e una libreria si tratta quindi di spazi mi-ti, che assommano le funzioni di zona notte con quelle di soggiorno.

Gli spazi sono spesso minimi e si ricorre alla soluzione dei letti sovrapposti in L'utilizzo di mobili componibili consente di adattare questi spazi alle diverse esigenze legate alla crescita dei ragazzi, che passano rapidamente dall'età dei giochi a quella della riflessione e dello studio.

La normativa italiana impone che le camere da letto doppie non abbiano dimensioni inferiori a 14 mq e 9 mq quelle singole.

La stanza da bagno

Lo sviluppo tecnico degli apparecchi igienico-sanitari ha portato alla riduzione degli spazi occorrenti per i locali da bagno, come è avvenuto per le moderne cucine. Analogamente, anche il tempo di permanenza giornaliera

nel bagno è stato notevolmente ridotta. Le dimensioni minime di un bagno non sono dettate dalla normativa, ma solamente deve essere presente una finestra oppure un impianto di aerazione forzata (vedi appunti). Le minime dimensioni consigliate di un bagno sono: 3,70x1,45. Si consiglia, comunque di non scendere sotto i 6 mq.

EDILIZIA PER IL COMMERCIO

In relazione al: metodo di vendita, dimensioni dell'edificio, grado di assortimento delle merci e la natura dei prodotti, si può stabilire una distinzione tra commercio a piccola distribuzione e commercio a grande distribuzione.

Il primo si svolge essenzialmente nei **negozi**, il secondo negli **ipermercati** e nei **centri commerciali**. Ogni struttura, deve pertanto essere progettata, in base al numero di consumatori potenziali.

Negozi

Nei negozi il rapporto tra il venditore e l'acquirente è diretto e la tecnica di vendita di tipo tradizionale. Poiché generalmente si tratta di luoghi ricavati all'interno di edifici esistenti, forme e dimensioni cambiano in funzione degli stessi. Lo spazio da riservare al cliente può variare da un minimo di 1,9 mq a un massimo di 7 mq per i negozi più specializzati

Il negozio può essere organizzato in vari «settori»:

la vetrina, che pur con forme e misure diverse, deve richiamare l'attenzione e invitare il pubblico a entrare nel negozio;

l'entrata, con una porta d'ingresso larga circa 120 cm, in modo da consentire il passaggio di due persone contemporaneamente, quando gli spazi lo consentono, è consigliabile prevedere due porte, una per l'entrata e una per l'uscita;

uno spazio riservato alla scelta dei prodotti arredato con banchi e scaffalature a un'altezza da terra rispettivamente di 85 cm e 150 cm per consentire un'agevole visione ai clienti;

uno spazio per la sosta davanti alla cassa sufficientemente profondo (circa 4m) per non intralciare i percorsi intorno;

infine, una zona diservizio per il personale, da suddividere ulteriormente in un deposito che può anche essere esterno al negozio, se questo è troppo piccolo, e in un servizio igienico, come prescritto dal DPR n. 30 del 19/3/1956.

Ipermercati

Per le loro elevate dimensioni, che variano da **5000 a 50.000 mq**, queste attività commerciali sono quasi sempre ubicate fuori dai centri urbani. Si sviluppano prevalentemente a piano terra, nei quali si vendono sia generi alimentari sia prodotti per l'abbigliamento ed elettrodomestici. La vendita è parzialmente assistita, ma principalmente si effettua con il sistema del self-service.

I vari nuclei funzionali, oltre appunto alle zone di vendita dei prodotti, sono costituiti dai depositi per i carrelli, vicino all'entrata e all'uscita, dal magazzino per le merci con la zona per l'accesso diretto dei fornitori, le zone di filtro costituite dalle casse disposte "a barriera" e i parcheggi.

L'organizzazione interna degli ipermercati, tenendo soprattutto conto della psicologia dei clienti, deve essere semplice e priva di ostacoli, I percorsi devono essere larghi 180-200 cm, per consentire il passaggio e la sosta contemporanea di due carrelli; gli scaffali a parete devono avere un'altezza massima di 160 cm da terra e una profondità di 75-90 cm. quelli di tipo a isola devono invece avere un

perimetro che consenta il passaggio di un solo carrello (75 cm). Le uscite devono essere almeno due e larghe quanto i percorsi principali, l'altezza dei locali varia da 400 a 500 cm, a seconda di dove vengono installati gli impianti meccanici di areazione e riscaldamento. Infine, i parcheggi devono essere studiati in modo da creare il minor disagio possibile; per questo motivo, sono preferiti quelli a 45°; quelli riservati ai portatori di handicap devono essere posti vicino agli ingressi.

Centri commerciali

Rappresentano il sistema più moderno e completo per la vendita al dettaglio. Sono costituiti da un ipermercato e da una serie di negozi di diversa natura che servono da contorno. Gli schemi distributivi attualmente adottati sono diversi, ma quello che ha incontrato maggiore successo è impostato su **un** unico asse centrale in cui sono dislocati i vari percorsi, le zone di sosta, gli accessi ai piani superiori, i punti informativi e altri svariati servizi. Tale percorso deve «guidare» i clienti in modo ordinato; per questo motivo, deve avere una larghezza di 6-8 m che aumenta fino a 12-16 m nei luoghi in cui si prevedono zone per la sosta. Questo percorso ha un'altezza variabile e vi si devono affacciare le porte di entrata e uscita dell'edificio.

È opportuno riservare per ogni metro quadrato di superficie utile da 1 a 1,7 mq di superficie per il parcheggio e la viabilità esterna, visto il numero elevato di persone che vi affluiscono contemporaneamente.

EDILIZIA PER LA CULTURA

INDICI STANDARD DI SUPERFICIE: SCUOLA MATERNA
(il valore tra parentesi esprime il numero dei locali relativi agli spazi descritti)

DESCRIZIONE DEGLI SPAZI	n. sezioni 1	n. sezioni 2	n. sezioni 3	(1*)
	n. alunni 30	n. alunni 60	n. alunni 90	
	m ² /al.	m ² /al.	m ² /al.	
<i>Spazi per attività ordinarie:</i>				
1 — per attività a tavolino ...	1,80 (1)	1,80 (2)	1,80 (3)	
— per attività speciali	0,60 (2)	0,45 (3)	0,40 (4)	
2 <i>Spazi per attività libere:</i>	1,00	0,92	0,90	
<i>Spazi per attività pratiche:</i>				
3 — spogliatoio.....	0,50 (1)	0,50 (2)	0,50 (3)	
— locali lavabi e servizi igienici	0,67 (1)	0,67 (2)	0,67 (2 ÷ 3)	
— deposito	0,13 (1)	0,13 (1)	0,13 (1 ÷ 2)	
<i>Spazi per la mensa:</i>				
4 — mensa (2*)	0,67 (1)	0,40 (1)	0,40 (1)	
— cucina, anticucina, ecc. (30 m ² fissi per ogni scuola)	1,00	0,50	0,35	
<i>Assistenza:</i>				
5 — stanza per l'assistente (15 m ² fissi per ogni scuola)	0,50	0,25	0,17	
— spogliatoio e servizi igienici insegnante (6 m ² fissi per ogni scuola)	0,20	0,10	0,07	
— piccola lavanderia (4 m ² fissi per ogni scuola)	0,13	0,07	0,04	
Indice di superficie netta glo- bale	8,24	7,12	6,65	
Somma indici parziali	7,20	5,79	5,41	
Connettivo e servizi	1,04	1,33	1,24	
Connettivo e servizi / Sup. to- tale netta per cento	13 %	19 %	19 %	

Note: (1*) Le scuole fino a 9 sezioni si otterranno come combinazione di quelle riportate in tabella.

(2*) Con l'ipotesi del doppio turno di refezione.

TABELLA N. 6

INDICI STANDARD DI SUPERFICIE: SCUOLA ELEMENTARE

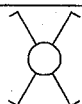
DESCRIZIONE ATTIVITA'		m ² /alunno
1	<i>Attività didattiche:</i>	
	— attività normali	1.80
	— attività intercielo	0.64
	Indice di superficie totale riferito alle attività didattiche min.	2.44
	max	2.70
2	<i>Attività collettive:</i>	
	— attività integrative e parascolastiche	0.40
	— mensa e relativi servizi (1*)	0.70
3	<i>Attività complementari:</i>	
	— biblioteca insegnanti	0.13
	Indice di superficie netta globale	5.21
	Indice di superficie max netta globale	5.58
	Somma indici parziali min.	3.67
	max	3.93
	Connettivo (servizi igienici (42 % della somma preced.) min.	1.54
	max	1.65
4	<i>Spazi per l'educazione fisica:</i>	
	Palestra, servizi palestra, ecc. Tipo A ₁ : 330 m ² (da 10 a 25 classi)	
5	<i>Alloggio custode (se richiesto): 80 m² netti</i>	
6	<i>Spazi per la direzione didattica (se richiesti): 100 m² netti</i>	

Note: (1*) Con l'ipotesi del doppio turno di refezione.

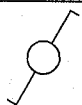
LEGENDA DEI SIMBOLI USATI

SIMBOLI

DESCRIZIONE



Invertitore unipolare



Deviatore unipolare



Interruttore unipolare



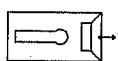
Interruttore bipolare



Apparecchio illuminante di emergenza 6W
IP40 (aut. 1 ora)



Centralina magnetotermica con salvavita



Videocitofono



Presa di corrente 2P+T da 10 A



Presa di corrente 2P+T da 16/10 A



Punto luce a soffitto



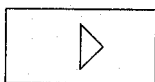
Punto luce a parete



Pulsante a tirante



Scaldacqua



CALDAIA