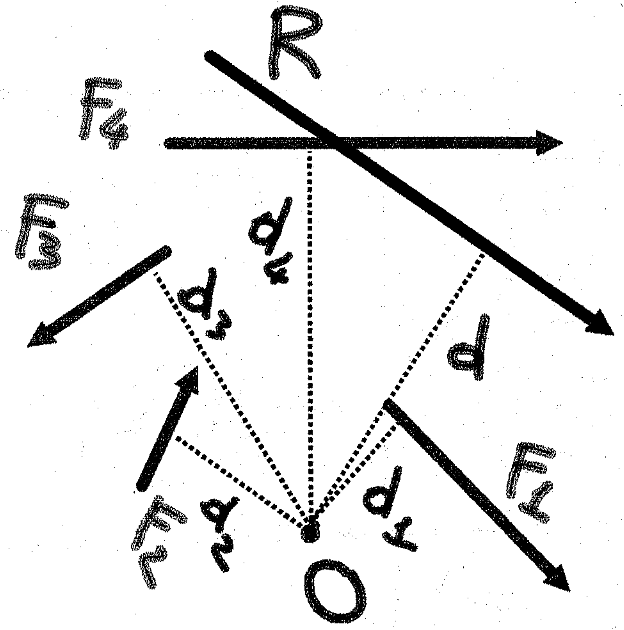
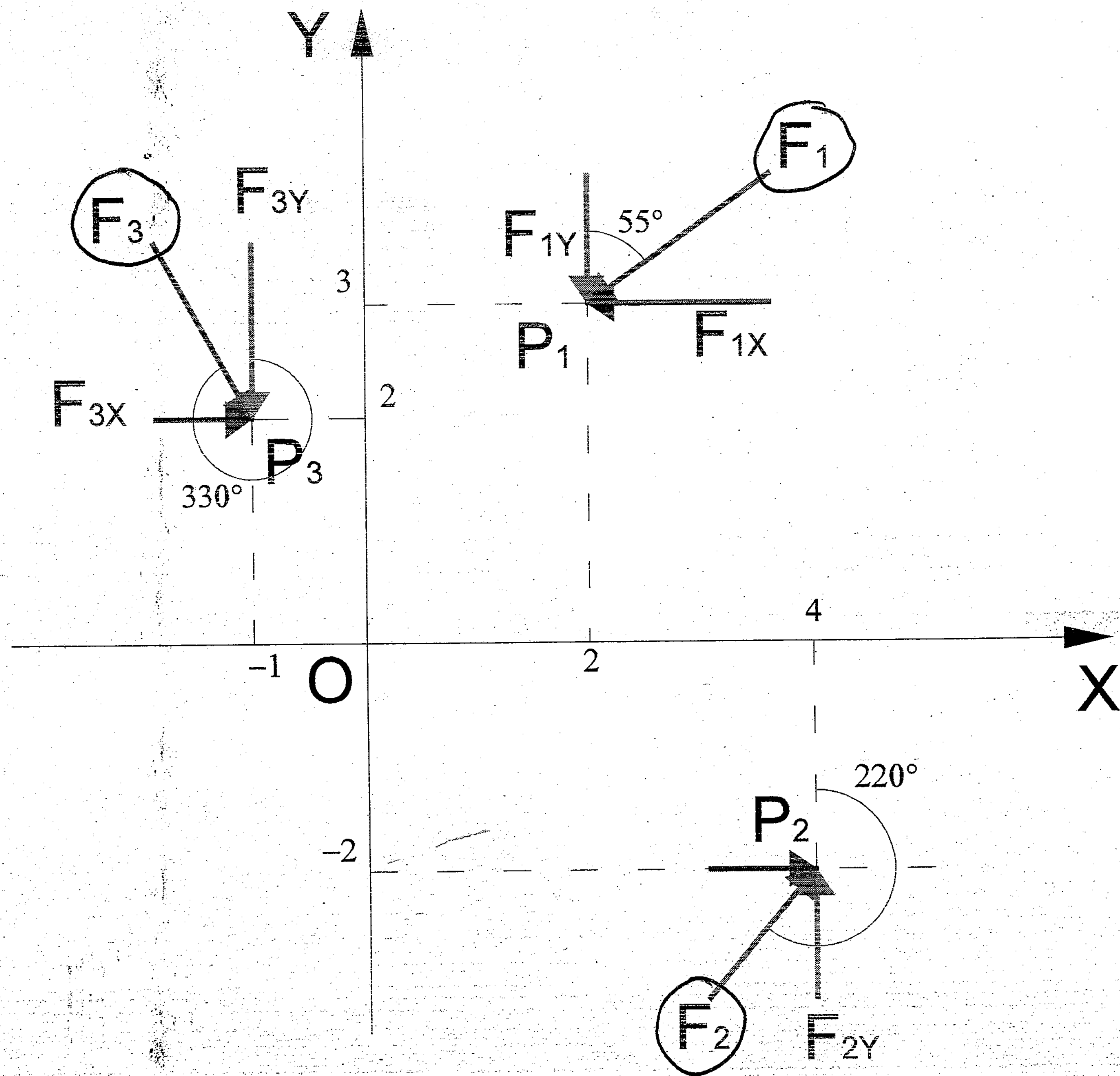
# Teorema di Varignon 3^a B

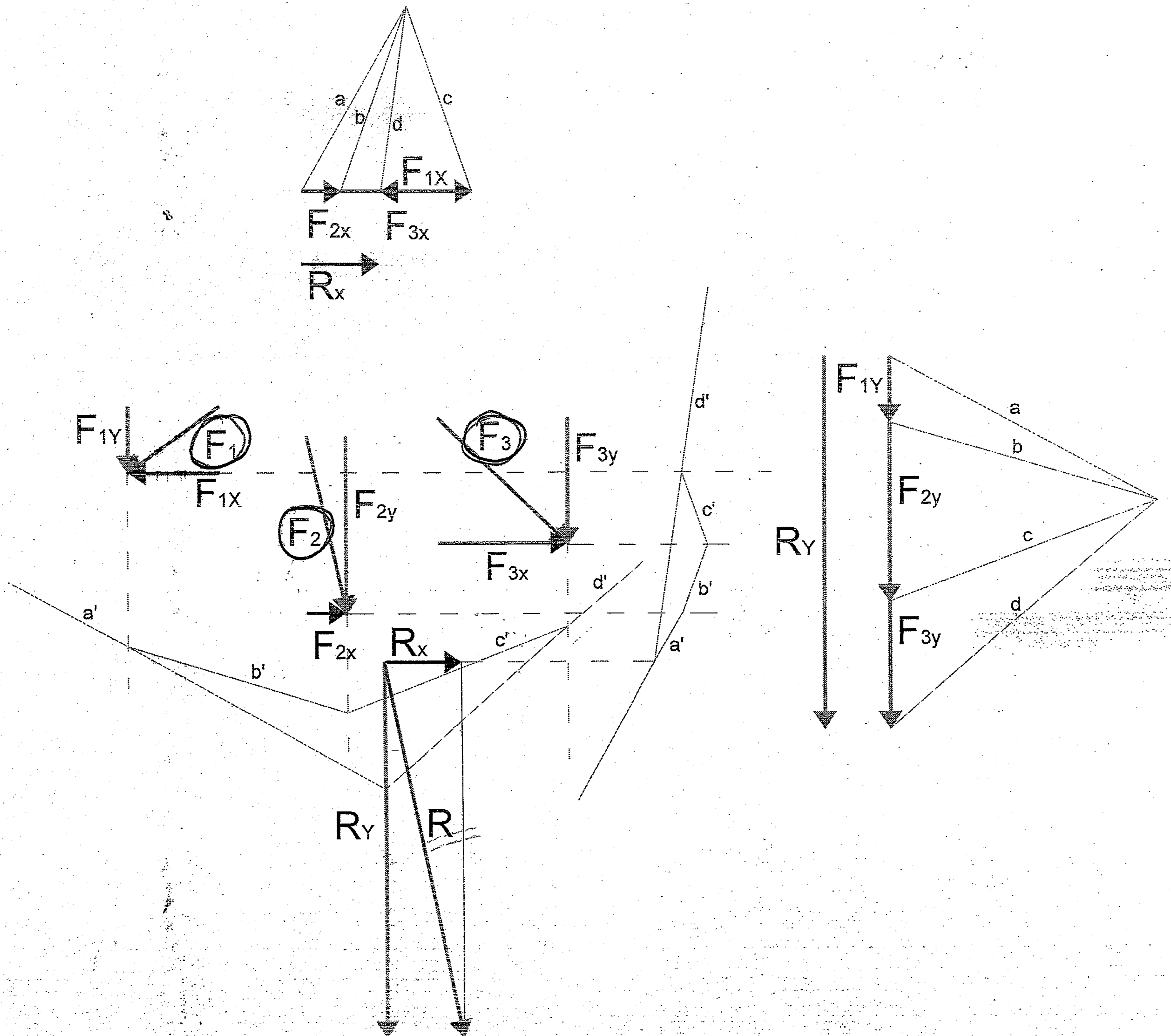
Dato un sistema di forze complanari e scelto un punto nel piano, si può calcolare il momento di ciascuna forza e determinare il momento risultante ; ma i singoli momenti e il momento risultante devono soddisfare il teorema di Varignon, per il quale:
"In un sistema di forze complanari il momento della risultante , rispetto a un punto "O" qualsiasi nel piano, è uguale alla somma algebrica dei $\underbrace{\text{momenti delle singole forze}}_{\text{es. } F_1 \times d_1 \ldots}$ rispetto al piano stesso."




$$F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4 = R \times d$$

$$d = \frac{F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4}{R}$$


Y
X
O
F1
F1Y
F1X
55°
P1
F3
F3Y
F3X
P3
330°
P2
220°
F2
F2Y
3
2
-1
2
4
-2


a
b
d
c
F1X
F2x
F3x
Rx
F1Y
F1
F1X
F2
F2y
F2x
F3
F3y
F3x
a'
b'
c'
d'
Rx
RY
R
RY
F1Y
a
b
F2y
c
d
F3y

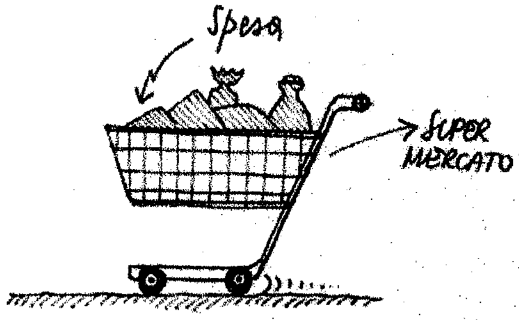
# LEZIONE 3°B

ITG NERVI / 2016

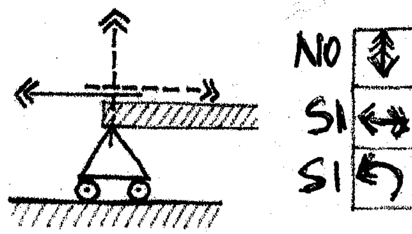
Gli esempi pratici

## VINCOLI

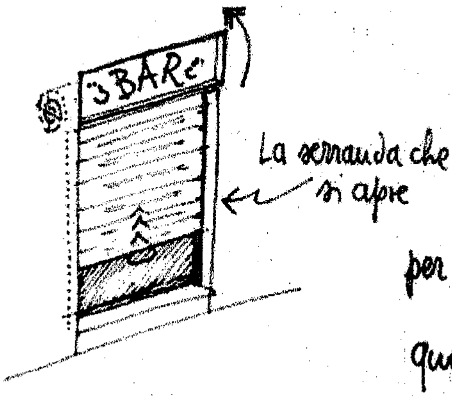
La schematizzazione statica



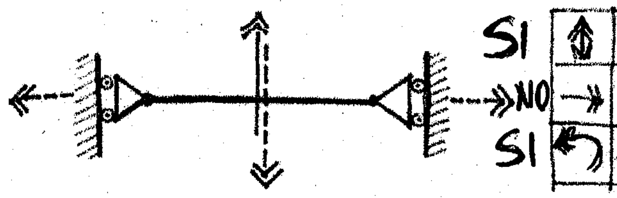

per ogni ruota questo è il vincolo!

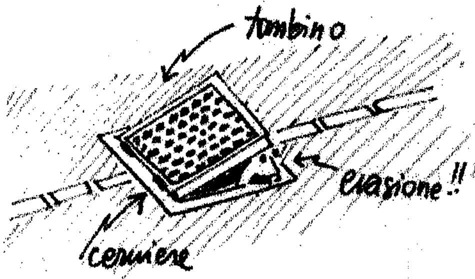


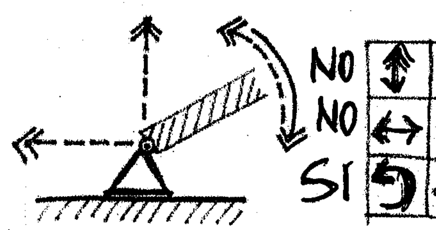

ABOLISCE / BLOCCA N° 1 GRADO DI LIBERTÀ



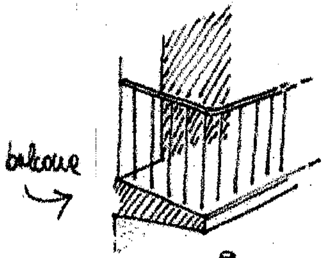

per ogni stecca del bandone questo è il vincolo!

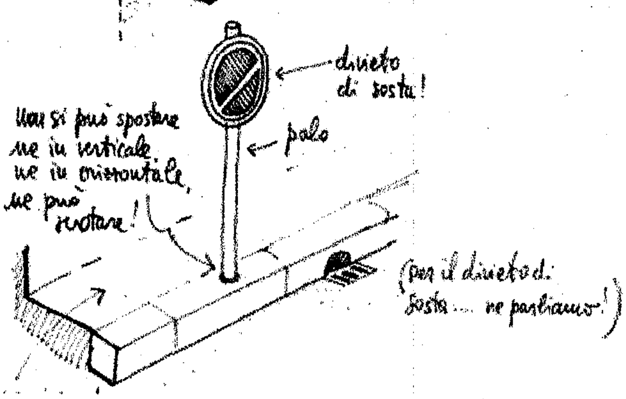


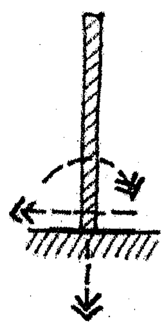



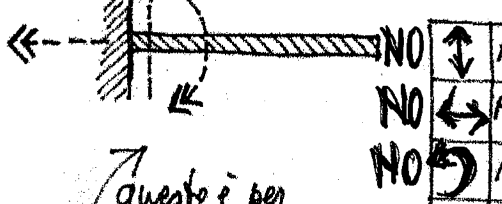

ABOLISCE / BLOCCA N° 2 GRADI DI LIBERTÀ



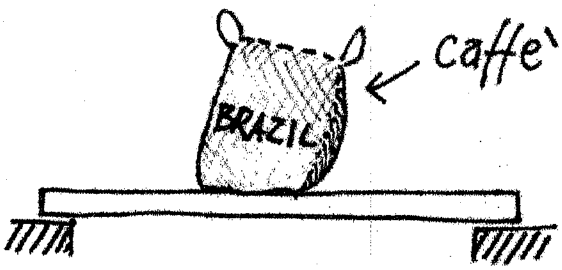
questo è per il palo!

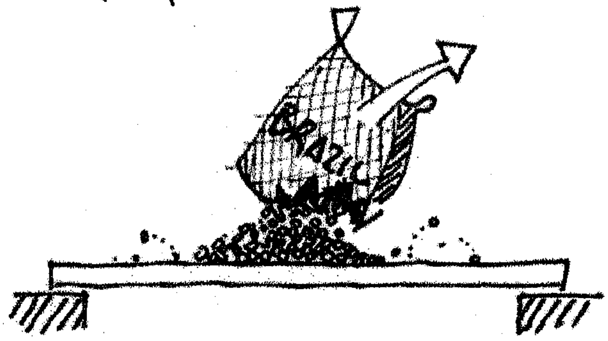


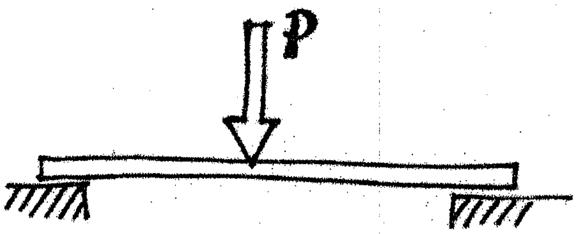

questo è per il balcone!

BLOCCA N° 3 GRADI DI LIBERTÀ

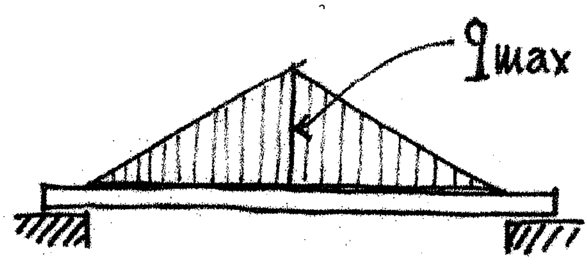
# TIPI DI CARICHI TRAVI



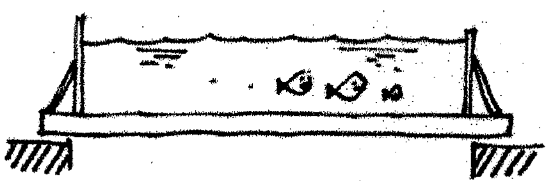



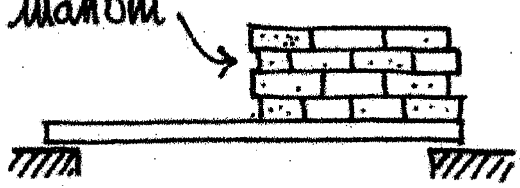



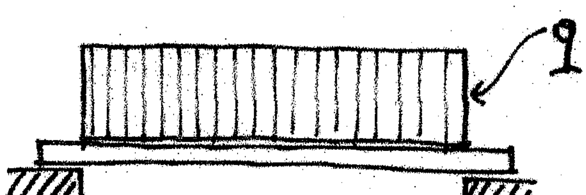

Carico concentrato



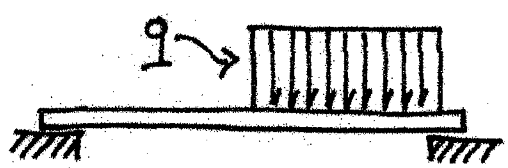

carico distribuito
(CON LEGGE TRIANGOLARE)





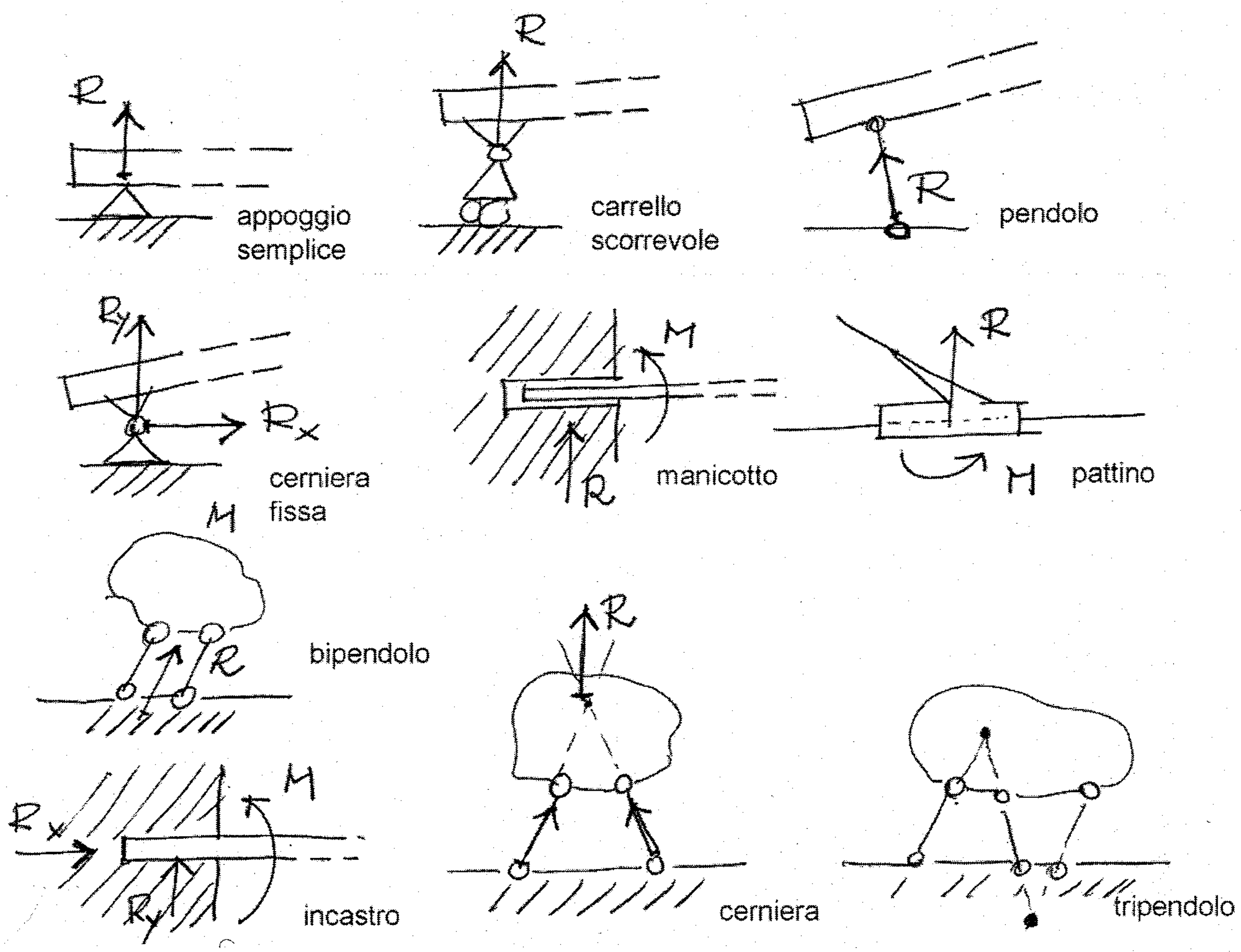




carico distribuito uniformemente
(con LEGGE COSTANTE)




carico distribuito
(CON LEGGE COSTANTE)
su porzione di trave

Questi tipi di vincoli sono schematizzazioni e semplificazioni di quanto avviene nella realtà per le connessioni tra gli elementi strutturali.




Schematizzazione dei vincoli nella Scienza delle Costruzioni.

I vincoli più importanti nel piano sono:

- il carrello (inibisce un grado di libertà e dà una reazione),
- la cerniera (inibisce due gradi di libertà e dà due reazioni),
- l'incastro (inibisce tre gradi di libertà e dà tre reazioni).

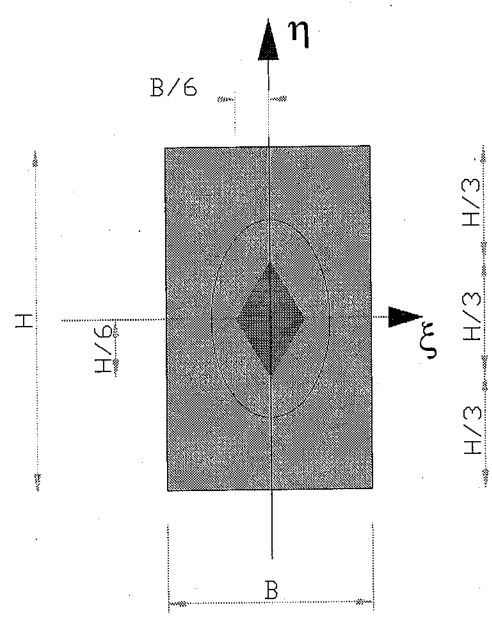
# Il Nocciolo d'inerzia

*Si definisce nocciolo d'inerzia di una figura, quella parte di superficie nella quale sono contenuti i centri relativi rispetto all'ellisse centrale d'inerzia di tutte le rette che non tagliano la figura.*

Il nocciolo d'inerzia riveste particolare importanza nello studio della sollecitazione di presso flessione in una sezione di trave nell'ipotesi di materiale perfettamente elastico. La ricerca del nocciolo d'inerzia, viene condotta ricercando i centri delle rette tangenti alla figura considerata. Si ricorda infatti che il centro di una retta è posto sempre dal lato opposto di questa rispetto al baricentro e che più la retta è lontana dal baricentro più il centro si avvicina a questo, mentre quando la retta si avvicina il centro si allontana. Da queste considerazioni si determina che la superficie cercata è quella delimitata dai centri relativi a tutte le rette tangenti alla figura.
Nel seguito verranno determinati i noccioli d'inerzia relativi al rettangolo ed al cerchio, rimandando per le altre figure note alle formule che sono riportate sui prontuari, mentre si ritiene che la determinazione del nocciolo d'inerzia per le figure composte vada oltre gli obbiettivi formativi perseguiti da questo testo.

## *Il rettangolo*

Il rettangolo è la sezione geometrica più utilizzata in campo strutturale, e provvediamo a determinarne il nocciolo d'inerzia in forma letterale, così da ottenere delle utili formule che ci consentiranno di ottenere il nocciolo d'inerzia per qualsiasi dimensione assumeranno la base **B** e l'altezza **H** della sezione.
Il nocciolo d'inerzia si determina calcolando la posizione del centro relativo di ogni retta tangente alla figura. Nel caso specifico determineremo i centri relativi alle rette coincidenti con i lati del rettangolo. Per il calcolo dei centri faremo uso della relazione che lega le coordinate dei centri alla posizione della retta considerata ed al valore del raggio d'inerzia.




$$i_\xi^2 = Y_X \cdot Y_G$$

Il raggio d'inerzia $i_\xi$ è dato dalla seguente espressione:

$$J_\xi = \frac{B \cdot H^3}{12}; \quad A = B \cdot H; \quad i_\xi^2 = \frac{J_\xi}{A} = \frac{\frac{B \cdot H^3}{12}}{B \cdot H} = \frac{H^2}{12}; \quad i_\xi = \frac{H}{\sqrt{12}}$$

La distanza dal Baricentro del centro relativo alla base è data da:

$$Y_X = \frac{i_\xi^2}{Y_G} = \frac{\frac{H^2}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{H}{6}$$

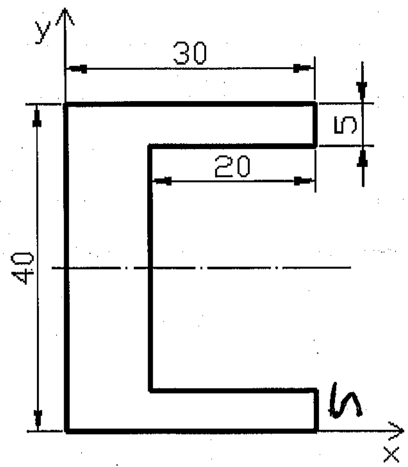
Sull'asse η si riportano dal lato opposto della base considerata la distanza YX appena determinata.

**VERIFICA DI PROGETTAZIONE COSTRUZIONI E IMPIANTI**

**CLASSI: 3A-3B-3C cat** **Tempo: 90 min**

**NOME:......................... COGNOME:......................... DATA: 12/12/2016 ORE: 10:00-11:30**

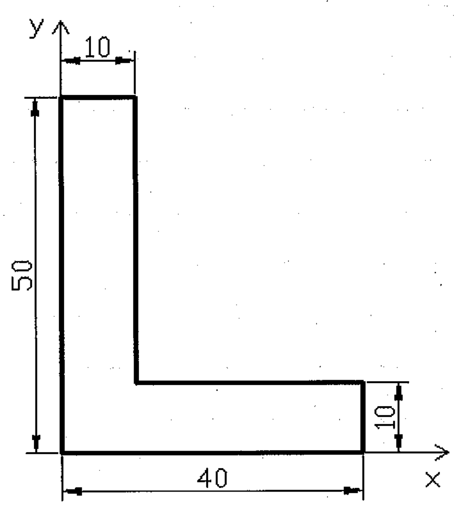
1) Determinare analiticamente le coordinate del Baricentro $G(x_G\ ;\ y_G)$ della figura geometrica sottostante con le quote in centimetri.




$x_G = ?$

$y_G = ?$

2) Dopo aver determinato le coordinate del baricentro, determinare i momenti di inerzia baricentrici della sezione rappresentata nella figura sottostante.




$x_{oG} = ?$

$y_{oG} = ?$

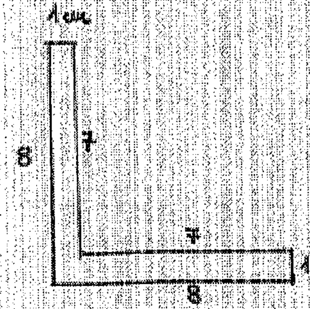
$I_{xoG} = ?$

$I_{yoG} = ?$

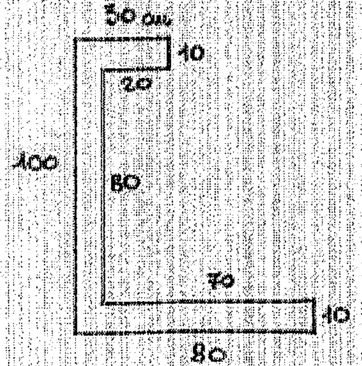
# ESERCIZI DI RIEPILOGO

DETERMINARE LE COORDINATE DEI BARICENTRI DELLE SEGUENTI SEZIONI_

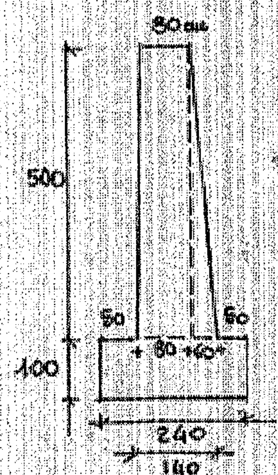
1)



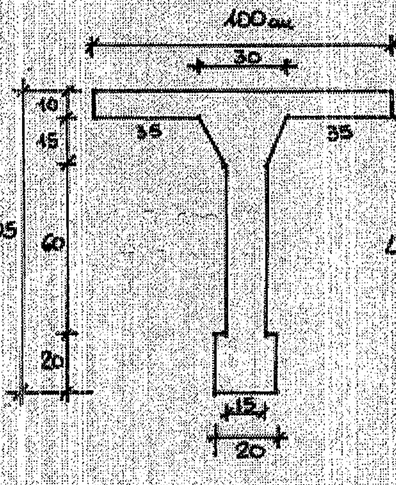

2)



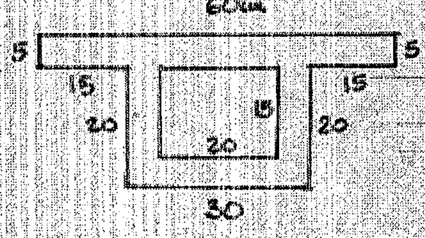

3)




4)




5)



**Capitolo**

# LA STATICA DELLE TRAVI

## 2 - 1. LA TRAVE

<u>Definizione:</u> La TRAVE è un *solido generato da un'area piana di forma e dimensioni variabili con continuità, che si muove nello spazio mantenendosi normale alla traiettoria descritta dal suo baricentro,* detta "ASSE GEOMETRICO".
In una trave:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sviluppo lineare}\\ \text{Raggi di curvatura della traiettoria}\end{array}\right\} >> \text{Dimensioni della sezione}$$

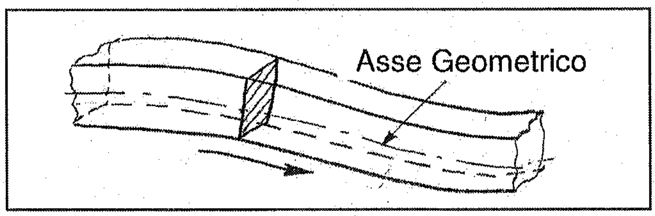



Fig. 2-1. La trave.

Se l'asse geometrico della trave giace su un piano, la trave si dice: TRAVE PIANA.

### EQUILIBRIO STATICO DELLA TRAVE

Se una trave è caricata da n Forze, detti:

$F_i$ = Forza generica agente sulla trave,

$F_{ix}$ , $F_{iy}$ , $F_{iz}$ = Componenti di $F_i$ nelle direzioni x, y, z,

$M_{ix}$ , $M_{iy}$ , $M_{iz}$ = Momenti di $F_i$ rispetto agli assi x, y, z,

affinché la trave sia in equilibrio statico devono essere soddisfatte le seguenti 6 CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$$

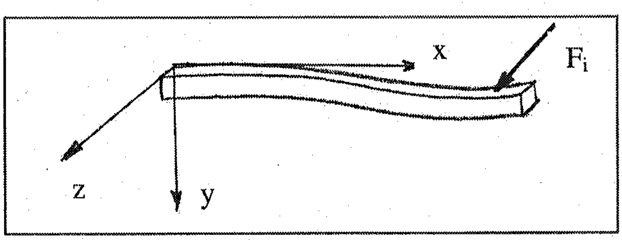



Fig. 2-2. Forza generica agente sulla trave.

Nel caso di una TRAVE PIANA, devono essere soddisfatte solamente 3 CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

essendo $M_i$ il momento di $F_i$ rispetto ad un punto generico del piano.

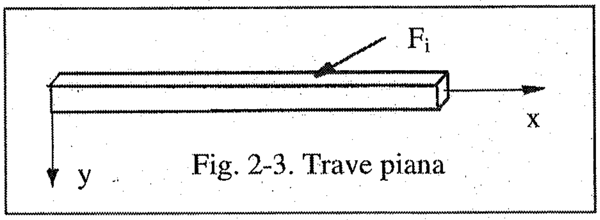



Fig. 2-3. Trave piana

## 2 - 2. I VINCOLI

Ogni elemento di una struttura deve essere vincolato in modo tale che non abbia nessuna possibilità di movimento.

Poiché un corpo nello spazio ha 6 GRADI DI LIBERTÀ (3 traslazioni secondo i tre assi x, y, z e 3 rotazioni intorno a tali assi), sono necessarie 6 CONDIZIONI DI VINCOLO INDIPENDENTI.

I vincoli sono caratterizzati dal numero di gradi di libertà che sono in grado di eliminare; definiamo quindi:

| | | | |
|---|---|---|---|
| - VINCOLO SEMPLICE | : | elimina | 1 GRADO DI LIBERTÀ |
| - VINCOLO DOPPIO | : | elimina | 2 GRADI DI LIBERTÀ |
| - VINCOLO TRIPLO | : | elimina | 3 GRADI DI LIBERTÀ |
| - VINCOLO QUADRUPLO | : | elimina | 4 GRADI DI LIBERTÀ |
| - VINCOLO QUINTUPLO | : | elimina | 5 GRADI DI LIBERTÀ |
| - VINCOLO SESTUPLO | : | elimina | 6 GRADI DI LIBERTÀ |

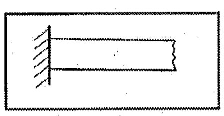
Le TRAVI PIANE hanno 3 GRADI DI LIBERTÀ (2 traslazioni lungo x e y e una rotazione); sono quindi necessarie 3 CONDIZIONI DI VINCOLO INDIPENDENTI.

### TIPI FONDAMENTALI DI VINCOLI NEL PIANO

Sono: INCASTRO, CERNIERA, INCASTRO SCORREVOLE, CARRELLO, PENDOLO (BIELLA).

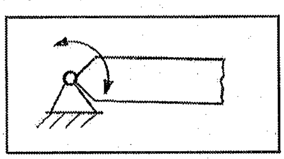
**- INCASTRO**

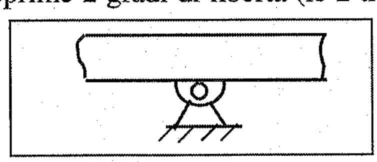
E' un vincolo TRIPLO che sopprime 3 gradi di libertà.



**- CERNIERA**

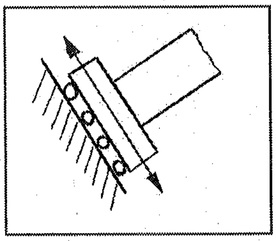
E' un vincolo DOPPIO che sopprime 2 gradi di libertà (le 2 traslazioni) ma consente la rotazione.

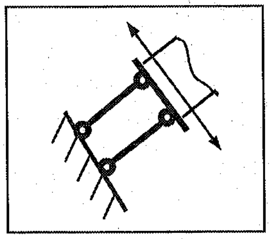




**- INCASTRO SCORREVOLE (o DOPPIO PENDOLO)**

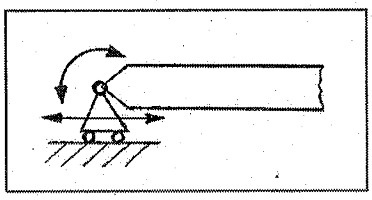
E' un vincolo DOPPIO che sopprime 2 gradi di libertà (traslazione in direzione ortogonale al piano di scorrimento e rotazione) ma consente la traslazione lungo il piano di scorrimento.





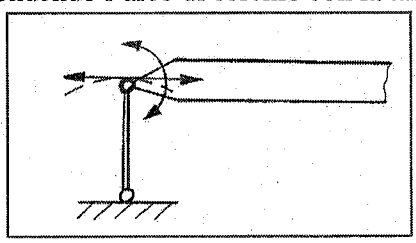
**- CARRELLO**

E' un vincolo SEMPLICE che sopprime 1 grado di libertà (la traslazione in direzione ortogonale al piano di scorrimento) ma consente la traslazione lungo il piano di scorrimento e la rotazione.



**- PENDOLO (BIELLA)**

E' un vincolo SEMPLICE che sopprime 1 grado di libertà (la traslazione nella direzione della biella) ma consente la traslazione nella direzione ortogonale alla biella e la rotazione. Per piccoli spostamenti, confondendo l'arco di cerchio con la tangente, è uguale al carrello.

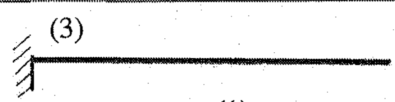


<u>INSIEMI DI VINCOLI NEL PIANO</u>

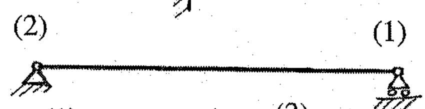
I vincoli di una trave nel piano, nel loro complesso, devono eliminare i 3 gradi di libertà.

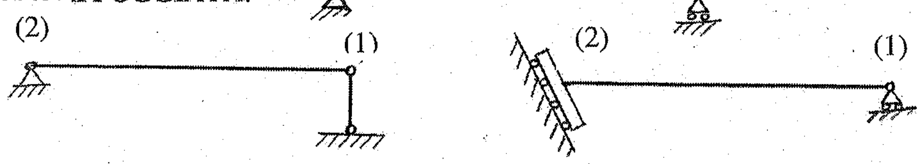
ESEMPI DI VINCOLI STRETTAMENTE SUFFICIENTI

- TRAVE A MENSOLA:




- TRAVE APPOGGIATA:

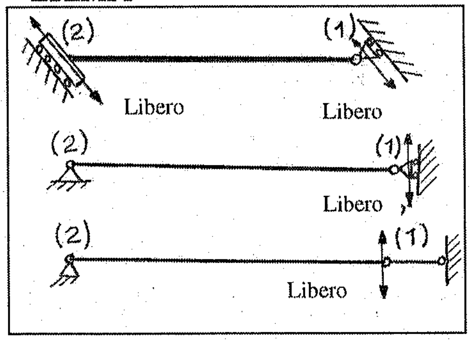



(tra parentesi sono indicati i gradi di libertà eliminati).

Sono vincoli in grado di togliere i tre gradi di libertà ma disposti in modo tale da sopprimere due volte lo stesso grado di libertà lasciandone libero uno.

ESEMPI




Entrambi i vincoli eliminano la traslazione in direzione ortogonale al piano di scorrimento e lasciano libera la traslazione lungo il piano di scorrimento.

Entrambi i vincoli eliminano la traslazione in direzione orizzontale e lasciano libera la traslazione in direzione verticale.

## STRUTTURE NEL PIANO COSTITUITE DA PIU' TRAVI

Nelle strutture piane costituite da più travi collegate fra loro, il numero di gradi di libertà è la somma dei gradi di libertà delle travi componenti, ma i vincoli totali devono tenere conto anche dei collegamenti fra le varie travi.

Detto:

n = Numero delle travi (ciascuna delle quali ha 3 gradi di libertà)
g = Numero globale di gradi di libertà della struttura,

si ha:

$$\boxed{g = 3\,n}$$

Nel caso delle strutture composte da più travi i vincoli possono essere:

- VINCOLI ESTERNI: che collegano la struttura al "suolo",

- VINCOLI INTERNI: che collegano le travi fra di loro.

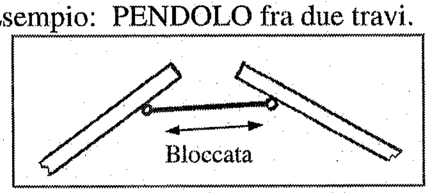
I vincoli esterni ed interni, nel loro complesso, devono sopprimere i "g" gradi di libertà della struttura.

## I VINCOLI INTERNI

Impediscono i movimenti relativi fra due tronchi di struttura collegati. Possono essere:

- SEMPLICI: Eliminano 1 grado di libertà.

Esempio: PENDOLO fra due travi.

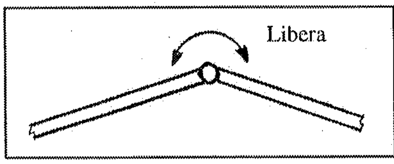



Elimina solamente la traslazione nella direzione del proprio asse.

- DOPPI: Eliminano 2 gradi di libertà.

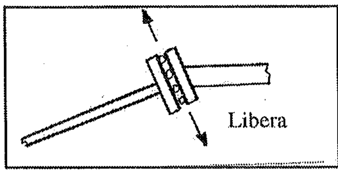
Esempi:

CERNIERA INTERNA:




Elimina le due traslazioni relative e consente
mente la rotazione relativa.

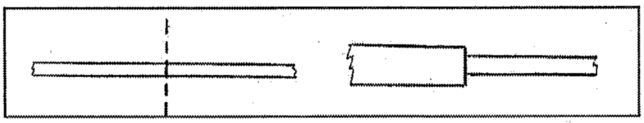
INCASTRO SCORREVOLE:




Elimina la rotazione e la traslazione nella
rezione ortogonale e consente la traslazione
zione del piano di scorrimento.

- TRIPLI: Eliminano 3 gradi di libertà.

Esempio: INCASTRO INTERNO:



Ogni sezione di una trave continua può essere considerata come sede di un incastro interno. La cosa prende significato se, in corrispondenza di quella sezione, c'è una variazione delle caratteristiche geometriche della sezione. I due tratti di trave possono essere considerati incastrati internamente.

Nota:

Il fatto di considerare una qualsiasi sezione di una trave come sede di un incastro interno non modifica il numero totale di gradi di libertà del sistema. Infatti i tre gradi di libertà aggiunti al sistema considerando 2 travi al posto di una, vengono annullati dai 3 gradi di vincolo introdotti dall'incastro interno.

## GRADI DI LIBERTÀ' SOTTRATTI DAI VINCOLI: "v"

Detti:

i = Numero degli Incastri (esterni ed interni),

c = " delle Cerniere,

s = " degli Incastri Scorrevoli,

p = " dei Pendoli o dei Carrelli,

si definisce: GRADO DI VINCOLO v :

$$v = 3i + 2(c+s) + p$$

NUMERO DI VINCOLI NECESSARI PER BLOCCARE UNA STRUTTURA NEL PIANO

E' dato dall'uguaglianza:

$$v - g = 0$$

cioè:

$$3i + 2(c+s) + p - 3n = 0$$

Una struttura nella quale è verificata questa uguaglianza si chiama "ISOSTATICA".

## CASI PARTICOLARI

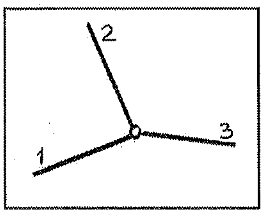
1) <u>CERNIERA INTERNA</u> che collega <u>PIU' DI DUE ELEMENTI</u>

Si calcola, in questo caso, il numero di CERNIERE EQUIVALENTI "c".
Detto:

m = Numero di elementi collegati dalla cerniera, si ha:

$$c = m - 1$$

Esempio:




$$m = 3$$

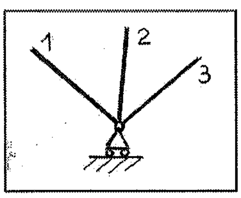
$$c = 3 - 1 = 2$$

Pensando infatti di tenere fisso l'elemento 1, la cerniera toglie due gradi di libertà a ciascuno dei due restanti elementi 2 e 3.

2) <u>VINCOLO CONTEMPORANEAMENTE ESTERNO E INTERNO</u>

Il suo grado di vincolo va computato tenendo presenti contemporaneamente entrambi gli effetti.

Esempio:



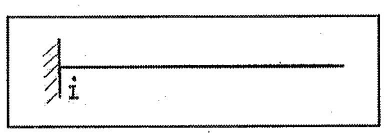

p = 1 (carrello esterno)

c = 3 - 1 = 2 (cerniera interna fra due elementi)

$$v = 2c + p = 2 \times 2 + 1 = 5$$

## ESEMPI DI STRUTTURE ISOSTATICHE

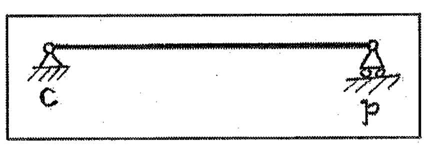
1 - TRAVE A MENSOLA




$n = 1,\ i = 1,\ c = s = p = 0$

$$v - g = 3i - 3n = 3 - 3 = 0$$

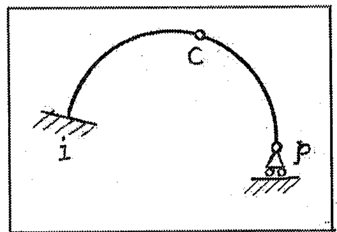
2 - TRAVE APPOGGIATA



$n = 1,\ i = 0,\ c = 1,\ p = 1,\ s = 0$

$v - g = 2c + p - 3n = 2 + 1 - 3 = 0$

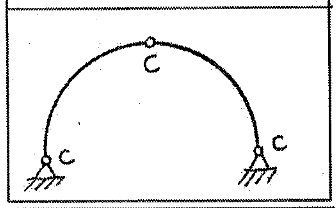
3 - ARCO




$n = 2,\ i = 1,\ c = 1,\ p = 1,\ s = 0$

$v - g = 3i + 2c + p - 3n = 3 + 2 + 1 - 6 = 0$

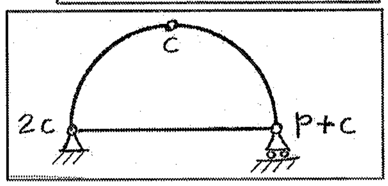
4 - ARCO A TRE CERNIERE




$n = 2,\ i = 0,\ c = 3,\ p = 0,\ s = 0$

$v - g = 2c - 3n = 6 - 6 = 0$

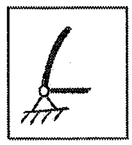
5 - ARCO CON CATENA




$n = 3,\ i = 0,\ c = 4,\ s = 0,\ p = 1$

Il numero di cerniere equivalenti presenti nella struttura è: $c = 4$

Cerniera sinistra



Cerniera esterna = 1,

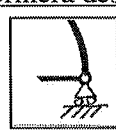
Cerniere interne = m - 1 = 2 - 1 = 1

Cerniere totali = 1 + 1 = 2

Cerniera centrale

Cerniera interna = 1

Cerniera destra



Cerniere interne = m - 1 = 2 - 1 = 1

Cerniere totali

$$c = 2 + 1 + 1 = 4$$

Grado di vincolo della struttura:

$$v - g = 2c + 1p - 3n = 2 \times 4 + 1 - 3 \times 3 = 0$$

Nota:

La relazione:

$$3i + 2(c + s) + p - 3n = 0$$

cade in difetto se uno o più vincoli sono MAL DISPOSTI (o inefficaci).

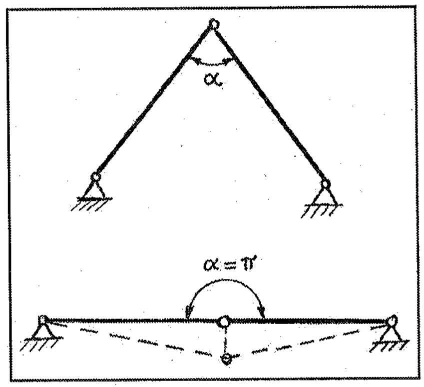
Ad esempio la struttura mostrata in figura è isostatica:
$n = 2,\ c = 3,$

$v - g = 2c - 3n = 2 \times 3 - 3 \times 2 = 0$

Se però l'angolo fra le due travi è: $\alpha = \pi$

cioè se le tre cerniere sono allineate, la struttura è LABILE perché può subire un moto rigido infinitesimo senza che i vincoli possano reagire.

La presenza di eventuali vincoli inefficaci in strutture complesse risulta evidente quando si esegue il calcolo delle reazioni vincolari.




## 2 - 3. LE REAZIONI VINCOLARI

Detti:

$g$ = gradi di libertà totali degli elementi costituenti la struttura,

$v$ = gradi di libertà sottratti dai vincoli (grado di vincolo),

una struttura si chiama:

- <u>LABILE</u> se: $\boxed{g - v > 0}$

Il numero: $l = g - v$ è il "grado di labilità".

- <u>ISOSTATICA</u> se: $\boxed{g - v = 0}$

(a patto che i vincoli siano ben disposti)

- <u>IPERSTATICA</u> se: $\boxed{g - v < 0}$

Il numero: $i = v - g$ è il "grado di iperstaticità".

Le strutture ISOSTATICHE e IPERSTATICHE hanno tutti gli elementi bloccati rispetto a qualunque moto rigido e possono quindi essere assoggettate a forze esterne restando in condizioni di equilibrio statico.

Poiché ogni singolo elemento permane in equilibrio statico solamente se le forze che globalmente agiscono su di esso sono in equilibrio, ne consegue che:

<u>*le FORZE ESTERNE che agiscono su ogni elemento DEVONO ESSERE EQUILIBRATE DALLE REAZIONI VINCOLARI esercitate dai VINCOLI ESTERNI e INTERNI.*</u>

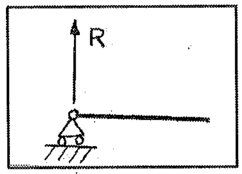
REAZIONI DEI VARI TIPI DI VINCOLI

Ad ogni parametro di spostamento impedito da un vincolo corrisponde un parametro duale di forza secondo lo schema seguente.

| **MOVIMENTO IMPEDITO** | $\Rightarrow$ | **REAZIONE CORRISPONDENTE** |
|---|---|---|
| SPOSTAMENTO ORIZZONTALE | $\Rightarrow$ | FORZA ORIZZONTALE |
| SPOSTAMENTO VERTICALE | $\Rightarrow$ | FORZA VERTICALE |
| ROTAZIONE | $\Rightarrow$ | COPPIA |

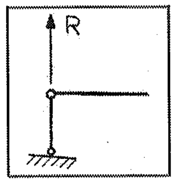
- <u>CARRELLO</u>

Forza ortogonale al piano di scorrimento




- <u>PENDOLO</u>

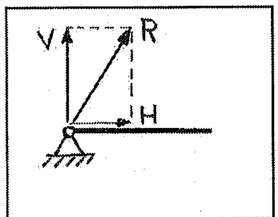
Forza diretta lungo il proprio asse




- <u>CERNIERA</u>

Forza R qualunque applicata nel punto vincolato con

componenti ORIZZONTALE (H) e VERTICALE (V)

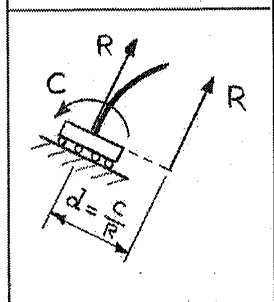



- <u>INCASTRO SCORREVOLE</u>

Forza R ortogonale al piano di scorrimento e
Coppia C.

Queste equivalgono ad una forza R parallela applicata ad una distanza dall'asse dell'incastro scorrevole pari a:

$$d = \frac{C}{R}$$



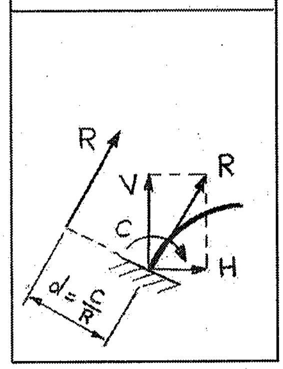

- <u>INCASTRO</u>

Forza R qualunque con componenti ORIZZONTALE (H) e VERTICALE (V)

Coppia C

Queste equivalgono ad una forza R parallela applicata ad una distanza dall'asse dell'incastro scorrevole pari a:

$$d = \frac{C}{R}$$




Si deduce che: *I PARAMETRI INCOGNITI DI REAZIONE INTRODOTTI DA OGNI VINCOLO SONO IN NUMERO UGUALE AI GRADI DI LIBERTÀ' DA ESSO SOPPRESSI.*

Pertanto:
*IL NUMERO GLOBALE DI PARAMETRI INCOGNITI DI REAZIONE VINCOLARE E' UGUALE AL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ' SOPPRESSI DAI VINCOLI* (v).
Poiché per ogni tronco della struttura sono disponibili 3 gradi di libertà e tre equazioni di equilibrio, segue che:

*"Il numero globale di equazioni di equilibrio a disposizione per la struttura è uguale al numero dei suoi gradi di libertà (g)".*

Per le strutture ISOSTATICHE è:

$$v = g$$

perciò esse sono anche: STATICAMENTE DETERMINATE in quanto:

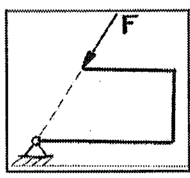
*"Il numero delle reazioni vincolari è uguale al numero delle equazioni di equilibrio disponibili; le reazioni vincolari possono quindi essere calcolate come soluzioni del sistema lineare algebrico delle equazioni di equilibrio".*

Per le strutture LABILI è:

$$l = g - v > 0$$

cioè le equazioni di equilibrio (g) sono in numero superiore alle reazioni vincolari incognite (v). In generale quindi il problema non ha soluzioni.

CASO PARTICOLARE




Quando il sistema delle forze esterne soddisfa le "l" equazioni di equilibrio sovrabbondanti, l'equilibrio statico diventa bile. Un esempio in questo senso è igura.

Per le strutture IPERSTATICHE è:

$$i = v - g > 0$$

cioè le reazioni vincolari incognite (v) sono in numero maggiore delle equazioni di equilibrio a disposizione (g). L'equilibrio statico è sempre possibile, ma le reazioni vincolari non sono determinabili con le sole equazioni di equilibrio; occorrono anche "i" equazioni supplementari (di congruenza).
Le strutture IPERSTATICHE sono quindi STATICAMENTE INDETERMINATE.

## 2 - 4. CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI NELLE STRUTTURE ISOSTATICHE

Il calcolo delle reazioni vincolari può essere eseguito con due diversi procedimenti analitici, uno "globale" che consente di calcolare contemporaneamente tutte le reazioni, ed uno "passo-passo" che consente di calcolare le reazioni vincolari una per una.

### 2 - 4 - 1. Procedimento analitico "globale"

I passi di cui si compone questo procedimento sono:

1) SUDDIVIDERE LA STRUTTURA nei tronchi che la costituiscono (uniti tra loro dai vincoli interni)
2) SOSTITUIRE AI VINCOLI, ESTERNI ED INTERNI, le REAZIONI VINCOLARI (forze e coppie) incognite, attribuendo ad esse un VERSO GENERICO.

3) SCRIVERE PER CIASCUN TRONCO LE 3 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO: traslazione orizzontale, traslazione verticale, rotazione intorno ad un punti qualsiasi.

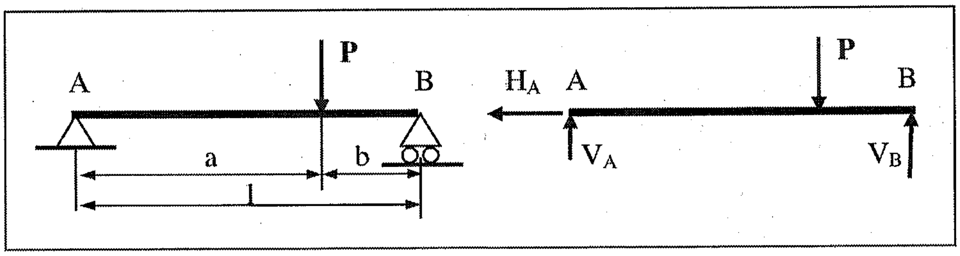
4) RISOLVERE IL SISTEMA di equazioni lineari nelle incognite reazioni vincolari. VALORI NEGATIVI delle reazioni vincolari significano che i VERSI REALI di quelle reazioni sono OPPOSTI a quelli ipotizzati presi in modo arbitrario.

Nota:

Per il calcolo delle reazioni nelle strutture isostatiche, la struttura deve essere considerata INDEFORMABILE; solo così le rette d'azione delle forze che la sollecitano restano invariate.

ESEMPIO n. 1

1) La struttura è costituita da un solo elemento; non occorre quindi effettuare nessuna suddivisione.
2) I vincoli nei punti A e B sono sostituiti dalle possibili reazioni vincolari; nel punto A la cerniera può generare le reazioni $H_A$ e $V_A$, nel punto B il carrello può generare unicamente la reazione $V_B$. I versi scelti per le reazioni dovranno essere confermati dalla risoluzione delle equazioni di equilibrio.




3) EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} H_A = 0 & (1) \\ P - V_A - V_B = 0 & (2) \\ P \times a - V_B\,(a+b) = 0 & (3) \end{cases}$$

- TRASLAZIONE ORIZZONTALE: (1)
- TRASLAZIONE VERTICALE: (2)
- ROTAZIONE INTORNO AD A: (3)

4) Dalla (2) si ottiene: $V_B = P - V_A$

Sostituendo nella (3), si ha: $P \times a - (P - V_A)\,(a + b) = 0$

da cui: $P \times a - P \times a - P \times b + V_A \times a + V_A \times b = 0$

da cui: $V_A\,(a + b) = P \times b$

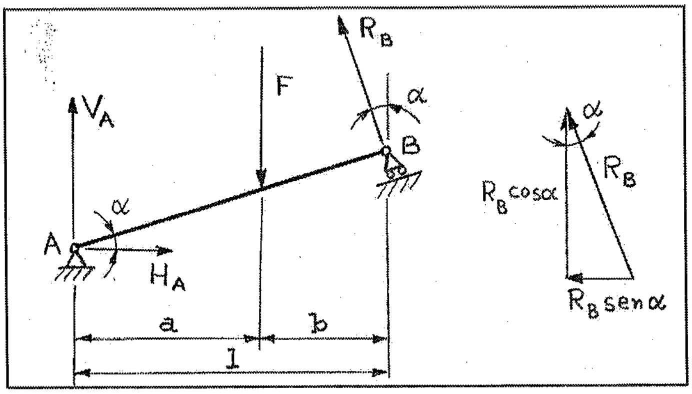
da cui, infine: $\boxed{V_A = P\dfrac{b}{a+b} = P\dfrac{b}{l}}$

Sostituendo nella (2) si ha:

$$V_B = P - V_A = P - P\frac{b}{l} = P\left(1 - \frac{b}{l}\right) = P\frac{l-b}{l} = P\frac{a}{l} \qquad \boxed{V_B = P\frac{a}{l}}$$

I segni positivi di $V_A$ e $V_B$ indicano che i versi ipotizzati sono entrambi esatti.
Si può osservare che, essendo $a > b$, risulta $V_B > V_A$ ; cioè l'appoggio più vicino al carico è il più sollecitato.

ESEMPIO n. 2




Trovare le reazioni vincolari di una trave appoggiata inclinata di un angolo $\alpha$ rispetto all'orizzontale, caricata da una forza verticale F.

1) La struttura è costituita da un solo elemento; non occorre quindi effettuare nessuna suddivisione.

2) La reazione della CERNIERA A potrà avere una componente orizzontale $H_A$ ed una componente verticale $V_A$ .
La reazione del CARRELLO B, $R_B$ ha direzione nota, perpendicolare al piano di scorrimento del carrello.

Le tre incognite sono quindi: $H_A$ , $V_A$ , $R_B$ .

3) Le tre equazioni di equilibrio sono:

TRASLAZIONE ORIZZONTALE

$$H_A - R_B \operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad (1)$$

TRASLAZIONE VERTICALE

$$V_A - F + R_B \cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

ROTAZIONE INTORNO AL PUNTO A

$$R_B \frac{l}{\cos\alpha} - F\,a = 0 \qquad (3)$$

Queste tre equazioni costituiscono il sistema che consente di calcolare $H_A$ , $V_A$ , $R_B$ .

Dalla (3) si ricava: $R_B = F \frac{a}{l} \cos\alpha$

Dalla (1) si ricava: $H_A = R_B \operatorname{sen}\alpha = F \frac{a}{l} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

Dalla (2) si ricava: $V_A = F - R_B \cos\alpha = F - F \frac{a}{l} \cos^2\alpha = F\,(1 - \frac{a}{l} \cos^2\alpha)$

I versi di $H_A$ , $V_A$ , $R_B$ sono quelli mostrati in figura.

SOLUZIONE GRAFICA

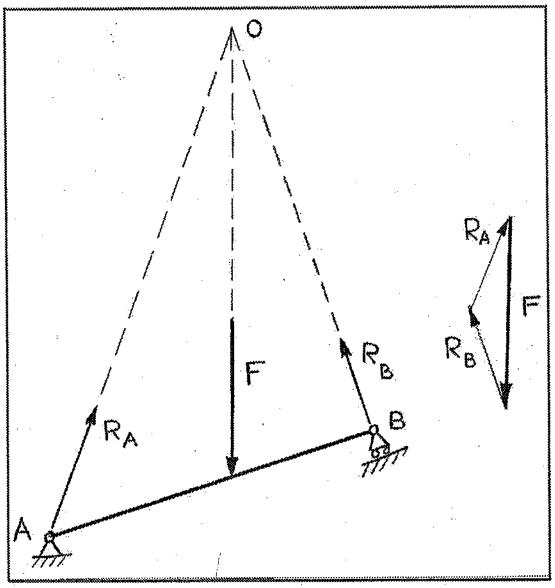
In casi semplici come quello in esame, il calcolo delle reazioni vincolari può essere effettuato anche con il metodo grafico.
Ricordando che le condizioni affinché tre

forze nel piano siano in equilibrio sono che:

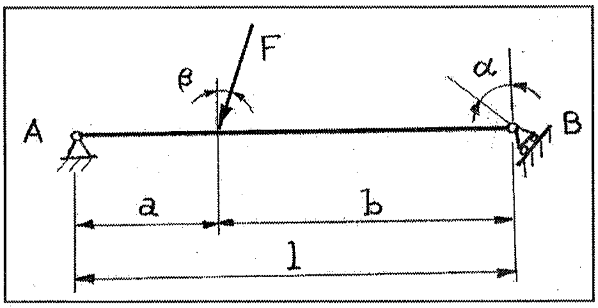
- Le tre forze passino per lo stesso punto,

- Il loro triangolo risulti chiuso,

la direzione di $R_A$ si trova immediatamente congiungendo A con O (punto di incontro di F e di $R_B$).
Scomponendo poi F nelle due direzioni di $R_A$ e di $R_B$ si trovano le due reazioni in modulo e in verso.




ESEMPIO n. 3

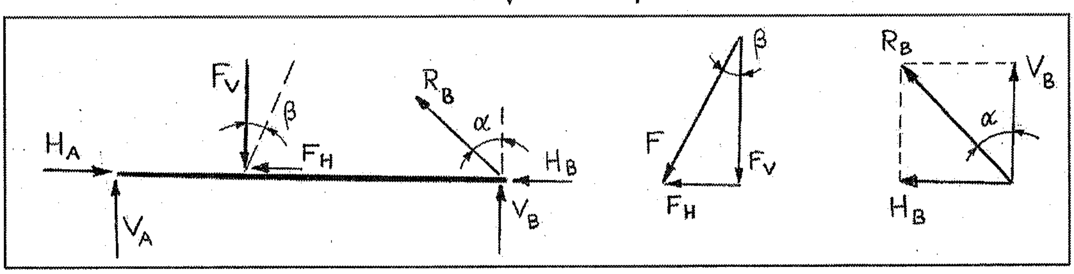



Calcolare le reazioni vincolari nella trave mostrata in figura.

Svincolando completamente la struttura, si mettono in evidenza le componenti orizzontali e verticali delle reazioni vincolari $R_A$ ed $R_B$ che sono rispettivamente: $H_A$ , $V_A$ e $H_B$ , $V_B$ .

Il carico applicato F ha invece le componenti:

$$\begin{cases} F_H = F \operatorname{sen} \beta \\ F_V = F \cos \beta \end{cases}$$




Le incognite sono apparentemente 4 ma, essendo nota la direzione di $R_B$, inclinata di $\alpha$ rispetto alla verticale, $H_B$ e $V_B$ sono legate dalla relazione:

$$H_B = V_B \operatorname{tg} \alpha \qquad (1)$$

Le tre equazioni di equilibrio sono:

TRASLAZIONE ORIZZONTALE

$$H_A - H_B - F_H = 0 \qquad (2)$$

TRASLAZIONE VERTICALE

$$V_A + V_B - F_V = 0 \qquad (3)$$

ROTAZIONE INTORNO AL PUNTO B

$$V_A\, l - F_V\, b = 0 \qquad (4)$$

Dalla (4) si ricava:

$$V_A = F_V \frac{b}{l} = F \cos\beta \left(\frac{b}{l}\right)$$

Dalla (3) si ricava:

$$V_B = F_V - V_A = F\cos\beta - F\cos\beta\left(\frac{b}{l}\right) = F\cos\beta\left(1 - \frac{b}{l}\right) = F\cos\beta\left(\frac{a}{l}\right)$$

Dalla (1) si ricava:

$$H_B = V_B \operatorname{tg}\alpha = F\cos\beta \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{a}{l}\right)$$

Dalla (2) si ricava:

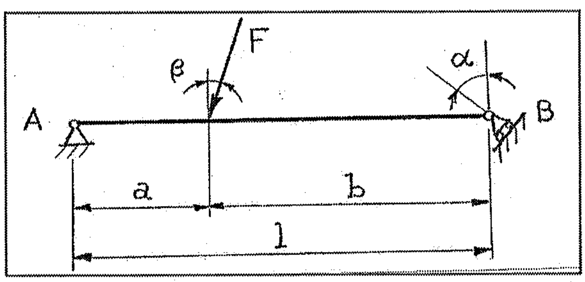
$$H_A = F_H + H_B = F \operatorname{sen}\beta + F\cos\beta\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{a}{l}\right) = F\left(\operatorname{sen}\beta + \frac{a}{l}\cos\beta\operatorname{tg}\alpha\right)$$

I segni positivi delle componenti delle reazioni significano che i versi ipotizzati sono tutti corretti.

**2 - 4 - 2. Procedimento analitico "passo - passo"**

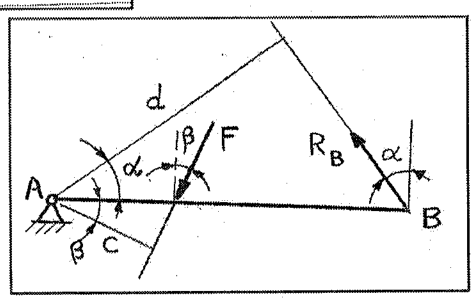
Questo procedimento è di uso più pratico del precedente e permette di prevedere più facilmente il verso corretto delle singole reazioni.
Questo metodo consiste nello SVINCOLARE PARZIALMENTE LA STRUTTURA mettendo in evidenza UN SOLO PARAMETRO DI REAZIONE ALLA VOLTA.
In questo modo si separano le incognite e la risoluzione risulta più semplice.

Risolviamo di nuovo, con questo metodo, l'<u>ESEMPIO n. 3</u>




$c = a \cos\beta$
$d = l \cos\alpha$

- CALCOLO di $R_B$




Svincoliamo parzialmente la struttura eliminando solamente il carrello sostituendolo con la sua reazione $R_B$ di cui è NOTA LA DIREZIONE.
Il VERSO di $R_B$ è intuitivo, considerando che $R_B$ deve EQUILIBRARE LA ROTAZIONE INTORNO AL PUNTO A prodotta dalla forza F:

$$F\,c - R_B\, d = 0$$

da cui:

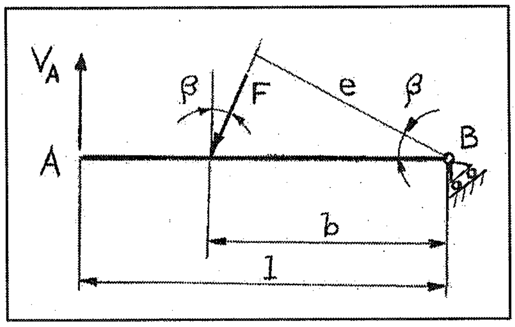
$$R_B = \frac{F\,c}{d} = F\,\frac{a\cos\beta}{l\cos\alpha}$$

Le componenti di $R_B$ sono quindi:

$$H_B = R_B \operatorname{sen}\alpha = F\,\frac{a\cos\beta}{l\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha = F\cos\beta\,\operatorname{tg}\alpha\,(\tfrac{a}{l})$$

$$V_B = R_B\cos\alpha = F\,\frac{a\cos\beta}{l\cos\alpha}\cos\alpha = F\cos\beta\,(\tfrac{a}{l})$$

- CALCOLO di $V_A$

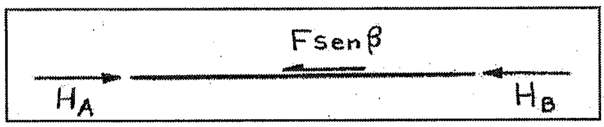



Eliminiamo la cerniera A; solamente la componente verticale della reazione, $V_A$ contribuisce all'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE INTORNO AL PUNTO B:

$$F\,e - V_A\,l = 0$$

da cui:

$$V_A = F\,\frac{e}{l} = F\,\frac{b\cos\beta}{l}$$



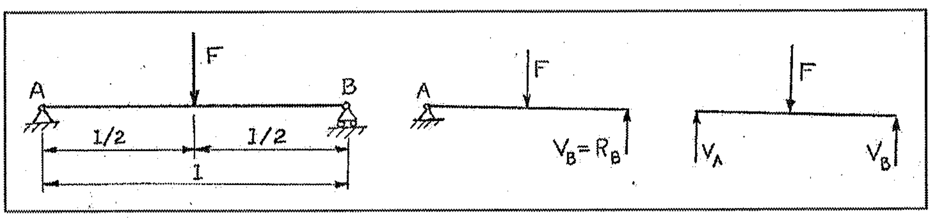

- CALCOLO di $H_A$:

$H_A$ si ricava immediatamente dall'EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE ORIZZONTALE:

$$H_A = F\operatorname{sen}\beta + H_B = F\operatorname{sen}\beta + F\cos\beta\,\operatorname{tg}\alpha\,(\tfrac{a}{l}) = F\,(\operatorname{sen}\beta + \tfrac{a}{l}\cos\beta\,\operatorname{tg}\alpha)$$

## 2 - 5. ALCUNI ESEMPI NOTEVOLI DI REAZIONI VINCOLARI

1 -



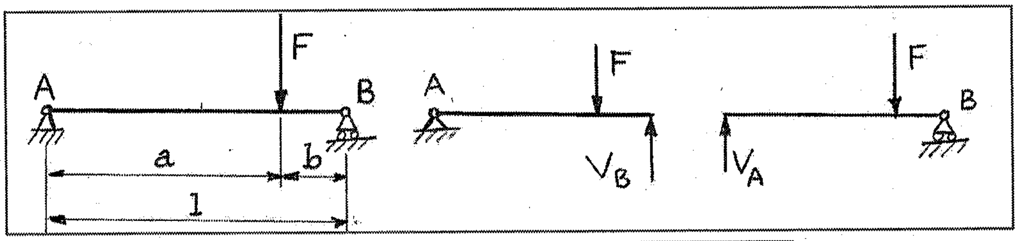

- Rotazione intorno ad A: $F\,\frac{l}{2} - V_B\,l = 0$ da cui: $\boxed{V_B = \frac{F}{2}}$

- Traslazione Verticale: $F - V_B - V_A = 0$ da cui: $\boxed{V_A = \frac{F}{2}}$

Poiché non vi sono componenti orizzontali né del carico F né della reazione del carrello, anche la cerniera A non darà componenti di reazione orizzontali (per l'equilibrio alla traslazione orizzontale); quindi:

$$\boxed{H_A = H_B = 0}$$

2 -




- Rotazione intorno ad A: $F\,a - V_B\,l = 0$ da cui: $\boxed{V_B = F\,\frac{a}{l}}$

- Rotazione intorno a B: $F\,b - V_A\,l = 0$ da cui: $\boxed{V_A = F\,\frac{b}{l}}$

- Traslazione orizzontale: $\boxed{H_A = H_B = 0}$

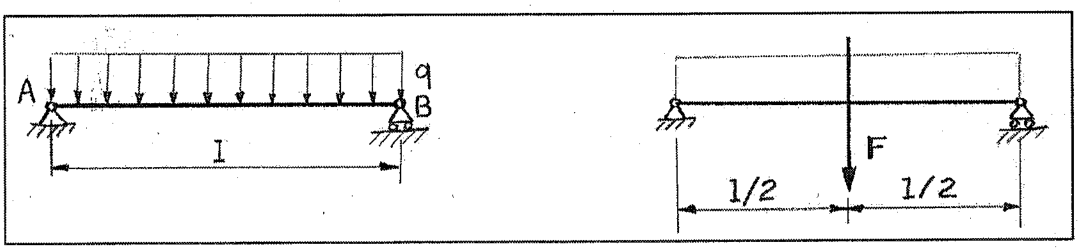
Nota:

Osservando le espressioni di $V_A$ e $V_B$ si vede che, essendo $a > b$, risulta:

$$V_A < V_B$$

Quindi l'appoggio più caricato è quello più vicino al punto di applicazione del carico.

3 -



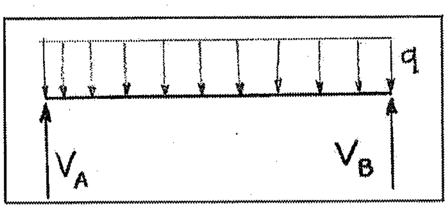

q = Carico UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO PER UNITA' DI LUNGHEZZA : [N/m], [N/mm]

Ai soli fini del calcolo delle reazioni vincolari, il carico distribuito può essere sostituito dalla sua forza risultante che, in questo caso è:

$$F = q\,l$$

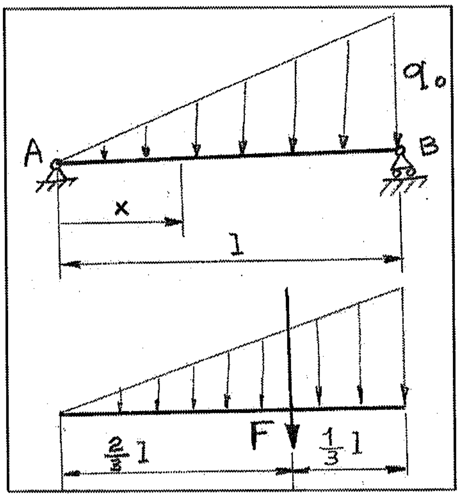
applicata al centro della trave.

Procedendo in modo analogo al caso 1 si ottiene:



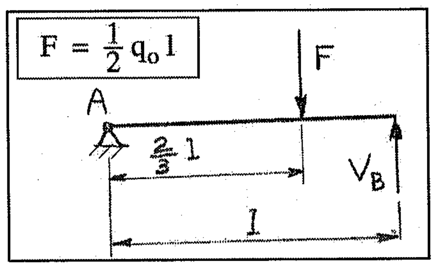

$$\boxed{\begin{array}{l} V_A = V_B = q\,l/2 \\ H_A = H_B = 0 \end{array}}$$

4 -




CARICO DISTRIBUITO PER UNITA' DI LUNGHEZZA, VARIABILE LINEARMENTE DA ZERO A $q_o$: [N/m], [N/mm]

In questo caso la FORZA RISULTANTE (rappresentata dall'area della distribuzione triangolare ed applicata nel baricentro) vale:

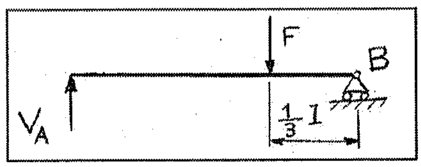



(Si veda la dimostrazione nell'APPENDICE alla fine di questo Capitolo).

- Rotazione intorno ad A:

$$V_B\, l - F \frac{2}{3} l = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad V_B = \frac{2}{3} F = \frac{2}{3}\, \frac{1}{2} q_o\, l = \frac{q_o\, l}{3}$$

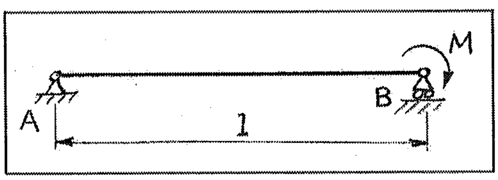
- Rotazione intorno a B:



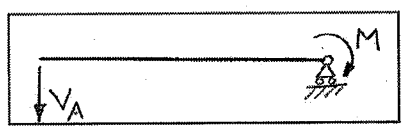

$$V_A\, l - F \frac{1}{3} l = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad V_A = \frac{1}{3} F = \frac{1}{3}\, \frac{1}{2} q_o\, l = \frac{q_o\, l}{6}$$

La reazione in B è doppia di quella in A.
Anche in questo caso: $H_A = H_B = 0$

5 -



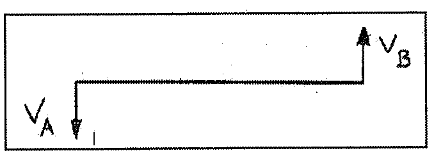

MOMENTO M APPLICATO AD UN'ESTREMITÀ.




- Rotazione intorno a B:

$$V_A\, l - M = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{V_A = \frac{M}{l}}$$

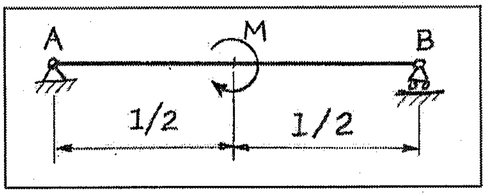
- Traslazione Verticale:




$$V_A - V_B = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{V_B = V_A = \frac{M}{l}}$$

Anche in questo caso: $H_A = H_B = 0$

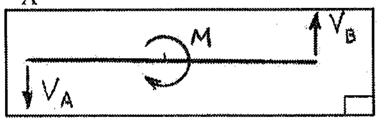
I versi di $V_A$ e $V_B$ sono quelli indicati in figura.

6 - 


Momento M applicato al centro.


- Rotazione intorno a B:

$V_A\, l - M = 0$ da cui: $\boxed{V_A = \frac{M}{l}}$

- Traslazione verticale: 

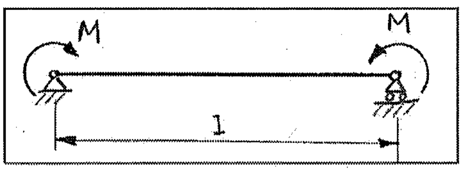

$V_A - V_B = 0$ da cui: $\boxed{V_B = V_A = \frac{M}{l}}$

Anche in questo caso: $H_A = H_B = 0$

I versi di $V_A$ e $V_B$ sono quelli indicati in figura.

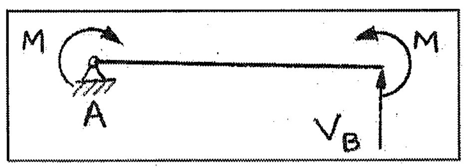
Nota:

Si osservi che, quando alla trave appoggiata è applicato un momento M (casi 5 e 6) i valori e i versi delle reazioni vincolari non dipendono dal punto di applicazione del momento lungo la trave.

7 - 


Due momenti M discordi applicati alle due estremità.

- Rotazione intorno ad A:




$M - M - V_B\, l = 0$ da cui: $\boxed{V_B = 0}$

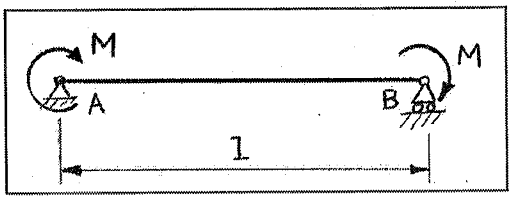
- Traslazione verticale:

$V_A - V_B = 0$ da cui: $\boxed{V_A = 0}$

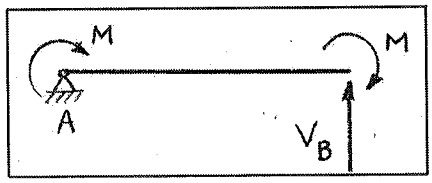
Anche in questo caso: $H_A = H_B = 0$

I vincoli sono scarichi.

8 -



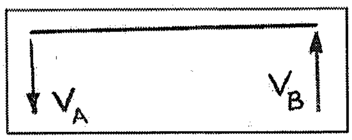

Due Momenti M CONCORDI applicati alle estremità.




- Rotazione intorno ad A:

$$M + M - V_B\, l = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{V_B = \frac{2M}{l}}$$

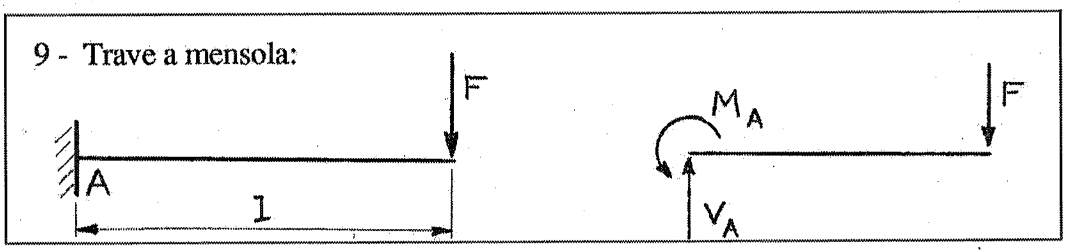
- Traslazione verticale:




$$V_A - V_B = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{V_A = V_B = \frac{2M}{l}}$$

Anche in questo caso: $H_A = H_B = 0$

9 - Trave a mensola:




Non essendoci componenti orizzontali del carico, la reazione dell'incastro si riduce ad una forza verticale $V_A$ e ad un momento $M_A$ detto "Momento d'incastro".

- Traslazione verticale:

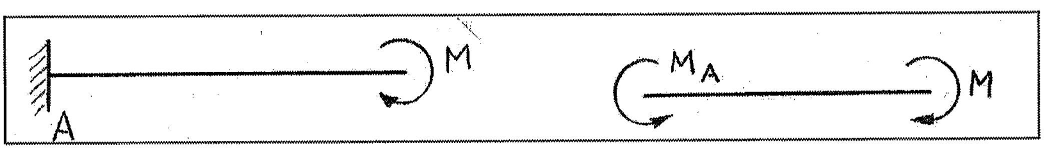
$$F - V_A = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{V_A = F}$$

- Rotazione intorno ad A:

$$F \times l - M_A = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{M_A = F\, l} \quad \text{(Momento d'incastro)}$$

Anche in questo caso: $H_A = H_B = 0$

10 - Trave a mensola:

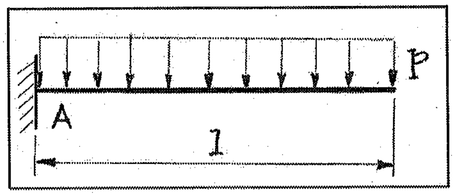



- Rotazione intorno ad A:

$$M - M_A = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{M_A = M}$$

Non essendoci carichi applicati, né orizzontali né verticali, risulta: $H_A = H_B = 0$.

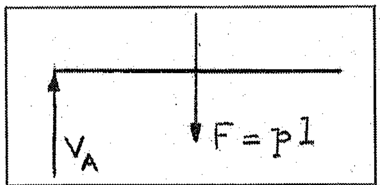
11 - Trave a mensola:




Ai soli fini del calcolo delle reazioni vincolari, si può sostituire il carico distribuito con la sua RISULTANTE:

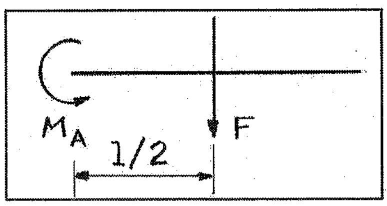
$$F = p\,l$$

- Traslazione verticale:




$$V_A - F = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{V_A = P\,l}$$

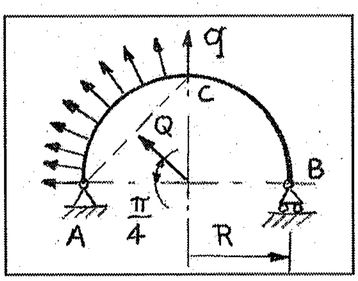
- Rotazione intorno ad A:




$$M_A - F\,\frac{l}{2} = 0 \qquad \text{da cui:} \qquad \boxed{M_A = \frac{p\,l^2}{2}}$$

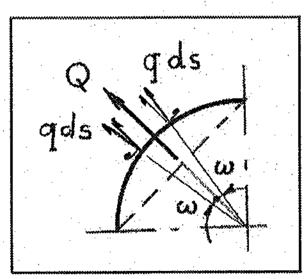
## 2 - 6. ALCUNI ESEMPI DI APPLICAZIONE

ESEMPIO n. 1




ARCO SEMICIRCOLARE CON CARICO RADIALE UNIFORME q.

Per il calcolo delle reazioni vincolari occorre, per prima cosa, calcolare la RISULTANTE DEI CARICHI DISTRIBUITI: Q.

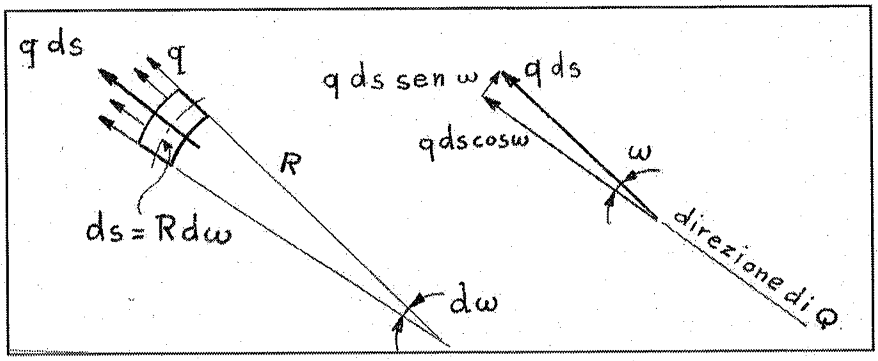



Poiché tutti i carichi elementari passano per il centro della semicirconferenza, anche la loro risultante Q dovrà passare per tale punto, per non dare luogo a nessun momento rispetto al punto stesso.
Per simmetria, inoltre, la risultante Q dovrà essere al centro della distribuzione dei carichi q e quindi diretta perpendicolarmente alla corda AC, cioè inclinata di $\pi / 4$ rispetto all'orizzontale.

Considerando due elementi di arco infinitesimi di lunghezza:

$$ds = R\,d\omega$$

disposti simmetricamente rispetto alla direzione di Q, la forza radiale che agisce su di essi sarà:



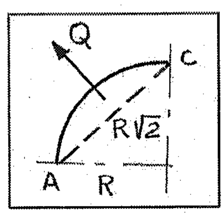

$$q\,ds = q\,R\,d\omega$$

che può essere scomposta nelle due forze:

$q\,ds$ sen $\omega$ parallela ad AC e

$q\,ds \cos \omega$ perpendicolare ad AC.

Le due componenti $q\,ds$ sen $\omega$ parallele ad AC sono uguali ed opposte e si fanno equilibrio.
Le due componenti $q\,ds \cos \omega$ perpendicolari ad AC si sommano.
Pertanto la risultante Q sarà la somma delle componenti perpendicolari ad AC:



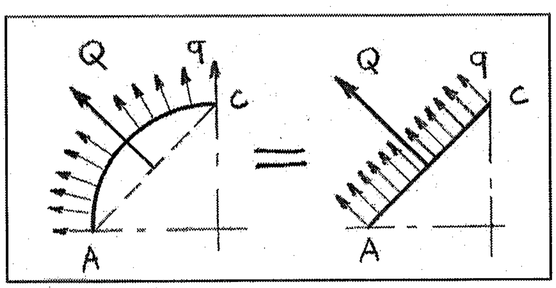

$$q\,ds \cos \omega = q\,R \cos \omega\, d\omega$$

e vale:

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} q\,R \cos \omega\, d\omega = q\,R\sqrt{2}$$

essendo: $R\sqrt{2}$ = lunghezza della corda AC

Pertanto *la risultante della distribuzione di forze radiali q lungo l'arco è uguale alla risultante di una distribuzione di forze q perpendicolari alla corda applicate lungo la corda*:



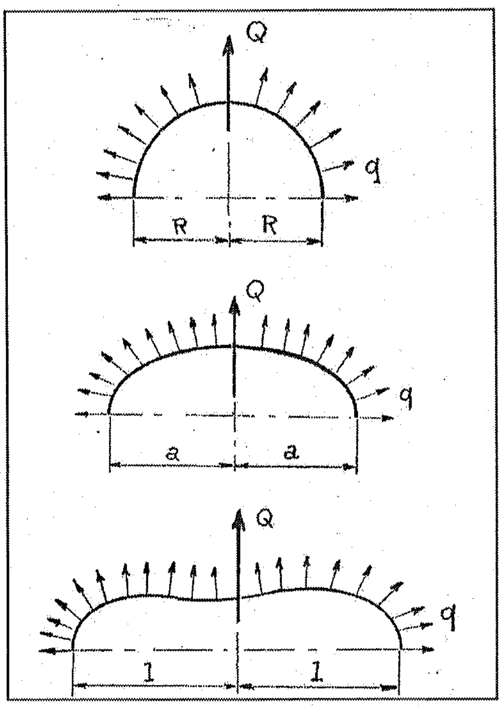

$$Q = q\,AC = q\,R\,\sqrt{2}$$

Il punto di applicazione di Q è il centro della corda AC.

Nota:

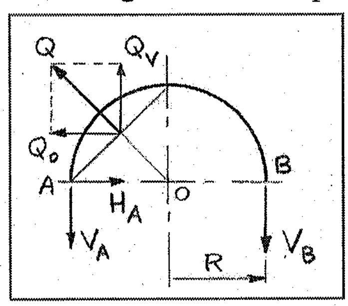
Questo risultato ha validità generale in tutti i casi in cui si ha un carico q distribuito uniformemente lungo una linea e perpendicolarmente alla linea stessa, punto per punto. Scomponendo i carichi elementari secondo le direzioni parallela e perpendicolare alla congiungente le estremità della linea stessa, le componenti parallele si fanno equilibrio mentre le componenti perpendicolari si sommano dando luogo ad una risultante Q di entità pari al valore del carico distribuito q moltiplicato per la lunghezza della congiungente gli estremi del tratto caricato, diretta perpendicolarmente ad essa ed applicata al centro.

Esempi:




REAZIONI VINCOLARI

La risultante $Q = qR\sqrt{2}$ applicata nel punto di mezzo della corda AC, può essere scomposta nelle due direzioni verticale e orizzontale, dando luogo alle due componenti:




$$Q_V = Q \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = qR\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = qR$$

$$Q_0 = Q\cos\frac{\pi}{4} = qR\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = qR$$

- Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$H_A - Q_0 = 0$$ (Il carrello in B non dà reazione orizzontale)

da cui:

$$H_A = Q_0 = qR$$

- Equilibrio alla rotazione intorno al centro O:

La risultante Q e la reazione $H_A$ non danno momento rispetto ad O perché passano per O; pertanto si ha:

$$V_A R - V_B R = 0$$

da cui:

$$V_A = V_B = V$$

- <u>Equilibrio alla traslazione verticale</u>:

$$2V - Q_V = 0$$

da cui:

$$2V = qR$$

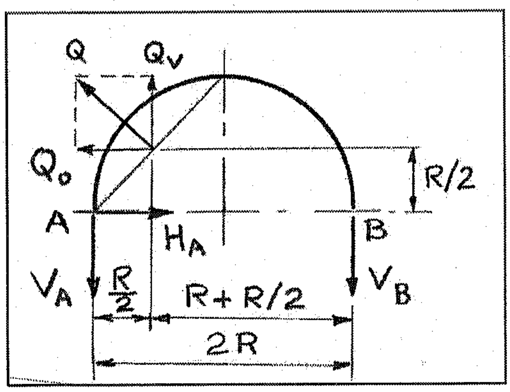
da cui, infine:

$$V = q\frac{R}{2} = V_A = V_B$$

<u>Nota:</u>

Allo stesso risultato si può arrivare <u>anche eliminando i vincoli uno alla volta</u>:

- Rotazione intorno ad A:




$$V_B\ 2R - Q_V\ \frac{R}{2} - Q_0\ \frac{R}{2} = 0$$

da cui, essendo: $Q_V = Q_0$ :

$$V_B\ 2R = Q_V\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\right)$$

e infine:

$$V_B = \frac{Q_V}{2} = \frac{qR}{2}$$

- Traslazione orizzontale:

$$H_A = Q_0 \qquad \text{da cui: } H_A = qR$$

- Rotazione intorno a B:

$$V_A\ 2R + Q_0\ \frac{R}{2} - Q_V\left(R + \frac{R}{2}\right) = 0$$

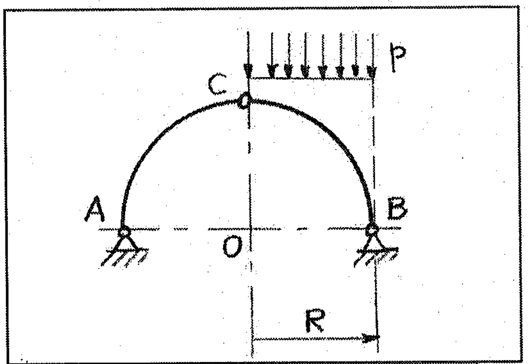
da cui:

$$V_A\ 2R = Q_V\left(R + \frac{R}{2} - \frac{R}{2}\right)$$

e infine:

$$V_A = \frac{Q_V}{2} = \frac{qR}{2}$$

ESEMPIO n. 2

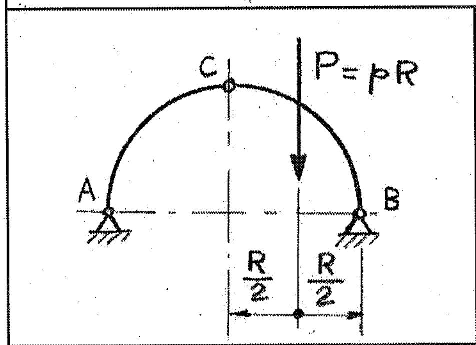



ARCO A TRE CERNIERE caricato da una forza p uniformemente distribuita su metà arco con direzione verticale.

In questo caso la RISULTANTE delle forze distribuite sarà una FORZA VERTICALE P di entità:

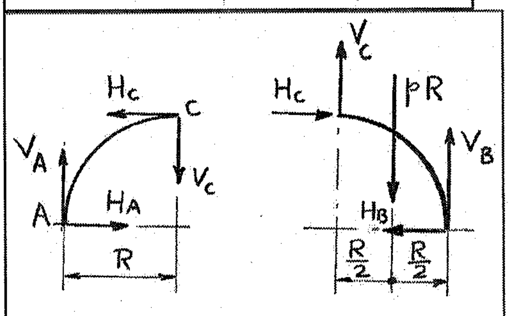
$$P = p\,R$$

applicata a distanza $\frac{R}{2}$ dal punto B.




In questo caso, oltre alle reazioni dei vincoli esterni A e B, occorre calcolare la reazione del VINCOLO INTERNO C.

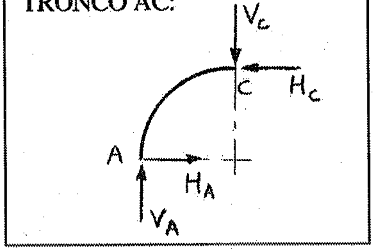
Poiché ciascuna di queste reazioni potrà avere una componente orizzontale ed una verticale, le incognite sono 6. Occorre quindi scrivere 6 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO.




Spezzando la struttura in corrispondenza del punto C, si mettono in evidenza le componenti orizzontali e verticali delle reazioni.

Si possono scrivere 3 equazioni di equilibrio per ciascuno dei due tronchi:

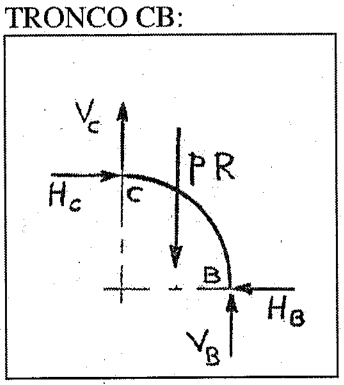
TRONCO AC:




- Traslazione Orizzontale: (1) $H_A = H_C$
- Traslazione Verticale: (2) $V_A = V_C$
- Rotazione intorno a C: (3) $V_A R - H_A R = 0$

da cui: $V_A = H_A$

TRONCO CB:




- Traslazione Orizzontale: (4) $H_C = H_B$
- Traslazione Verticale: (5) $V_C - p\,R = -V_B$
- Rotazione intorno a C:

$$H_B R - V_B R + p R \frac{R}{2} = 0$$

da cui: (6) $$H_B - V_B = -p\frac{R}{2}$$

Le equazioni (1) (2) (3) e (4) danno:

$$V_A = H_A = V_C = H_C = H_B$$

Le equazioni (5) e (6) possono quindi essere scritte nella forma:

$$V_A - pR + V_B = 0 \qquad (5')$$

$$V_A - V_B = -p\frac{R}{2} \qquad (6')$$

Ricavando $V_A$ da entrambe:

$$V_A = pR - V_B \qquad (5'')$$

$$V_A = V_B - p\frac{R}{2} \qquad (6'')$$

ed uguagliando, si ha:

$$pR - V_B = V_B - p\frac{R}{2}$$

da cui:

$$2V_B = pR + p\frac{R}{2} = \frac{3}{2}pR$$

e infine:

$$\boxed{V_B = \frac{3pR}{4}}$$

Dalla (6") si ha:

$$V_A = V_B - p\frac{R}{2} = pR\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{pR}{4}$$

Segue:

$$\boxed{V_A = V_C = \frac{pR}{4}}$$

ed anche:

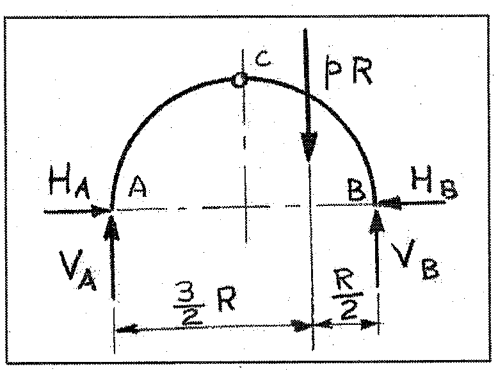
$$\boxed{H_A = H_B = H_C = \frac{pR}{4}}$$

Osservazione :

Come si è visto, nell'arco a tre cerniere nascono delle reazioni orizzontali non nulle ($H_A$, $H_B$, $H_C$) anche quando il carico applicato ha direzione verticale.

CALCOLO DELLE SOLE REAZIONI DEI VINCOLI ESTERNI A e B

Se interessa calcolare solamente le reazioni dei vincoli esterni A e B e non anche quelle interne della cerniera C, si può considerare l'equilibrio globale della struttura, avendo a disposizione le equazioni di equilibrio:




- Rotazione intorno ad A,
- Rotazione intorno a B,
- Traslazione Verticale,
- Traslazione Orizzontale.

Si può quindi scrivere:

- Rotazione intorno ad A:

$$pR\frac{3}{2}R - V_B 2R = 0$$

da cui:

$$V_B = \frac{3}{4}\,pR$$

- Rotazione intorno a B:

$$V_A 2R - pR\frac{R}{2} = 0$$

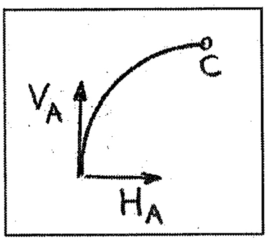
da cui:

$$V_A = \frac{pR}{4}$$

A questo punto l'equazione di equilibrio alla Traslazione Verticale è già soddisfatta dai valori trovati di $V_A$ e $V_B$.
Occorre quindi introdurre due ulteriori equazioni di equilibrio che possono essere opportunamente le:

- Equazioni di equilibrio alla rotazione intorno al punto C dei due singoli tratti di struttura:

- TRATTO AC:

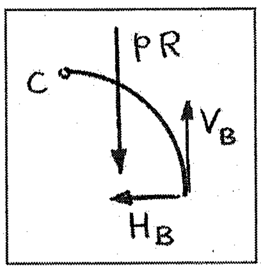



$$V_A R - H_A R = 0$$

da cui:

$$H_A = V_A = \frac{pR}{4}$$

- TRATTO CB:




$$pR\frac{R}{2} + H_B R - V_B R = 0$$

da cui:

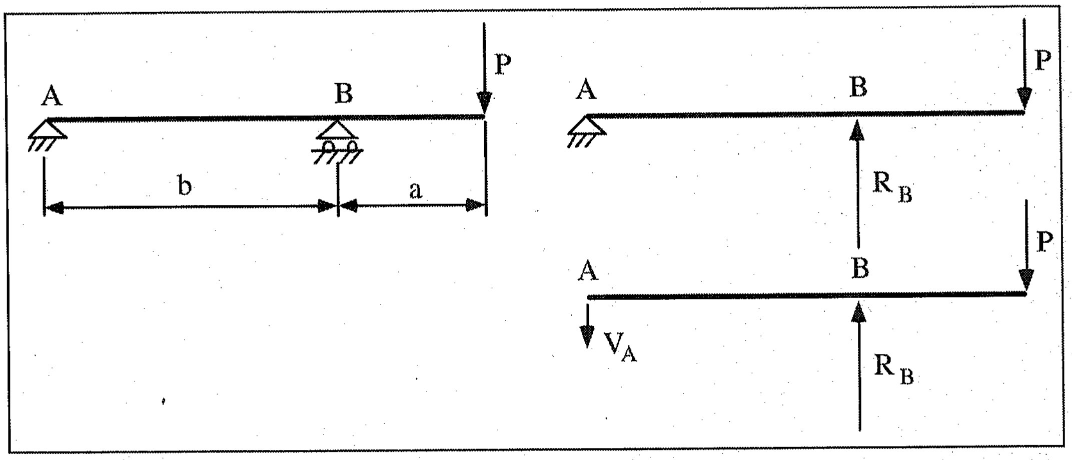
$$H_B = V_B - \frac{pR}{2} = \frac{3}{4}pR - p\frac{R}{2} = pR\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

e infine: $$H_B = \frac{pR}{4}$$

I valori trovati ora per $H_A$, $V_A$, $H_B$ e $V_B$ coincidono con quelli trovati in precedenza.

ESEMPIO n. 3

TRAVE APPOGGIATA CON UN TRATTO A SBALZO.




- Equilibrio alla rotazione intorno al punto A:

$$P\,(a+b) - R_B\, b = 0$$

da cui:

$$R_B = P\,\frac{a+b}{b}$$

- Equilibrio alla traslazione verticale:

$$P - R_B + V_A = 0$$

da cui:

$$V_A = R_B - P = P\,\frac{a+b}{b} - P = P\left(\frac{a+b}{b} - 1\right) = P\,\frac{a+b-b}{b} = P\,\frac{a}{b}$$

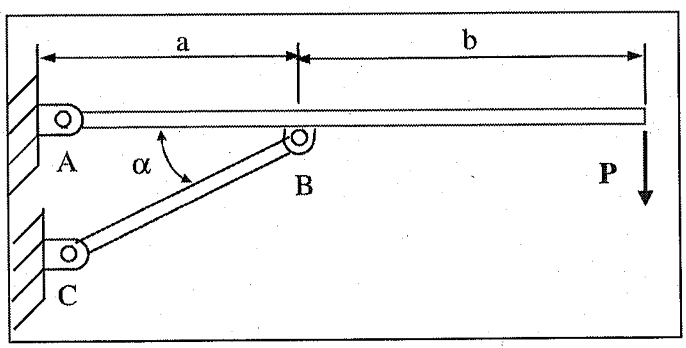
Lo stesso risultato poteva essere ottenuto scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto B:

$$V_A\, b - P\, a = 0$$

da cui:

$$V_A = P\,\frac{a}{b}$$

ESEMPIO n. 4




Struttura costituita da 2 travi collegate fra loro da una cerniera, nel punto B, che non interrompe la continuità materiale della trave orizzontale.

Dati:
a = 500 mm, b = 700 mm,
$\alpha$ = 30°, P = 10 kN.

Valutiamo dapprima se la struttura, costituita da n = 2 travi con c = 3 cerniere, è isostatica.

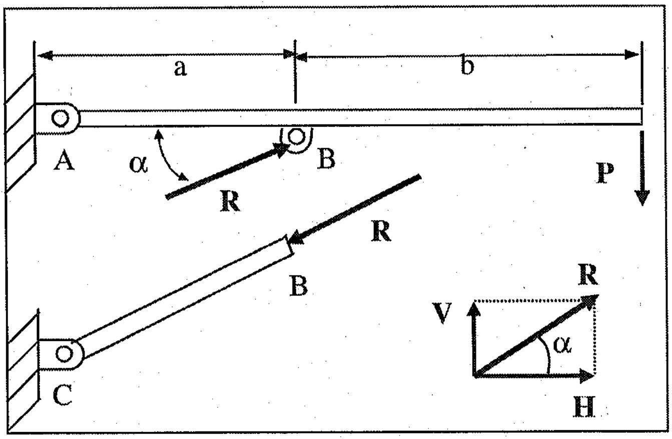
– Gradi di libertà: $g = 3 \times n = 6$

– Grado di vincolo: $v = 2 \times c = 6$

–

Essendo: $v = c$ la struttura è isostatica ed è quindi risolvibile con sole equazioni di equilibrio.

Separando le due travi in corrispondenza del punto B, esse sono entrambe labili.




La trave CB è in equilibrio solamente se la reazione **R** è diretta lungo il suo asse. E' quindi nota la direzione di **R**. Il verso di **R** è facilmente deducibile dall'equilibrio della trave AB.
Le componenti verticale e orizzontale di R sono:

$$V = R \text{ sen } \alpha = H \text{ tg } \alpha$$

$$H = R \cos \alpha$$

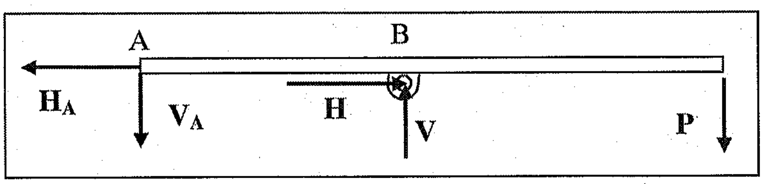
- Equilibrio alla rotazione intorno ad A:

$P(a + b) - V a = 0$ da cui: $V = P\dfrac{a+b}{a} = 10\dfrac{500+700}{500} = 24\text{kN}$

Segue: $H = \dfrac{V}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{24}{\text{tg}30°} = 41{,}57\text{kN}$

$R = \dfrac{V}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{24}{\text{sen}30°} = 48\text{kN}$

REAZIONI VINCOLARI DELLA TRAVE AB

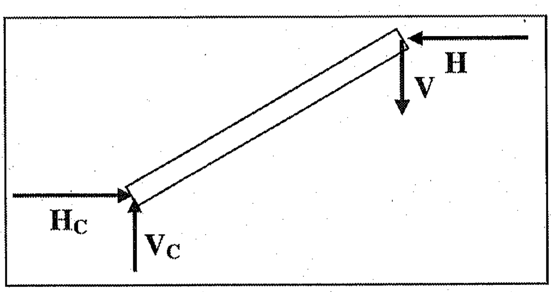



Eliminando la cerniera in A e sostituendola con le reazioni $H_A$ e $V_A$, si possonono scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale:

$H_A - H = 0$ da cui: $H_A = H = 41{,}57$ kN

$V_A - V + P = 0$ da cui: $V_A = V - P = 24 - 10 = 14$ kN

REAZIONI VINCOLARI DELLA TRAVE AB




Eliminando la cerniera in C e sostituendola con le reazioni $H_C$ e $V_C$, si possonono scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale:

$H_C - H = 0$ da cui: $H_C = H = 41{,}57$ kN

$V_C - V = 0$ da cui: $V_C = V = 24$ kN

## 2 - 7. OSSERVAZIONI SUL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

### 2 - 7 - 1. Principio di Sovrapposizione degli Effetti

Poiché le reazioni vincolari dei sistemi isostatici derivano da soluzione di sistemi lineari (con proporzionalità tra le reazioni e i carichi applicati), vige il

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

***"Le reazioni vincolari associate ad un sistema di più forze sono la somma delle reazioni vincolari associate ad ogni singola forza".***

In tutti i sistemi ISOSTATICI, le REAZIONI VINCOLARI SONO INDIPENDENTI DAL MATERIALE E DALLE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE SEZIONI.

Invece nei sistemi iperstatici NON STATICAMENTE DETERMINATI, le reazioni vincolari, oltre che dalle equazioni di equilibrio, dipendono anche da equazioni di congruenza che dipendono dalla deformabilità del materiale (cioè dal modulo elastico) e dalle caratteristiche geometriche delle sezioni.

### 2 - 7 - 2. Ipotesi delle Piccole Deformazioni

Le equazioni di equilibrio, per il calcolo delle reazioni vincolari, vengono scritte con riferimento alla <u>struttura indeformata</u> (considerata come un corpo rigido) mentre, in realtà, dovrebbero essere scritte con riferimento alla struttura deformata dai carichi.
La validità dei risultati è quindi limitata ai casi in cui <u>le deformazioni sono piccole</u>. Sono questi comunque i casi che interessano l'ingegneria.

### 2 - 7 - 3. Vincoli mal disposti o inefficaci

Nel caso di vincoli mal disposti o inefficaci, una o più delle equazioni di equilibrio sono combinazioni lineari delle rimanenti e non sono quindi utili per la determinazione delle incognite.

## APPENDICE

## CARICO DISTRIBUITO TRIANGOLARMENTE: CALCOLO DELLA RISULTANTE

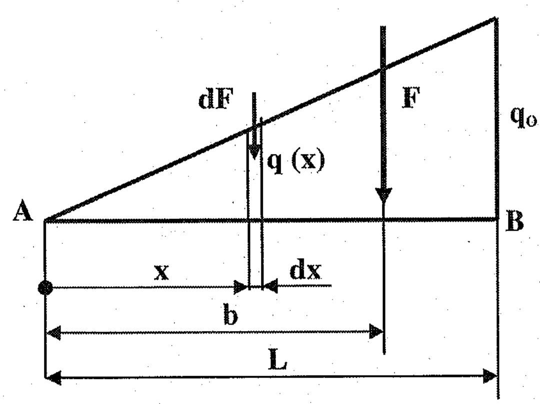
In un PUNTO GENERICO di ascissa x, il CARICO DISTRIBUITO vale:

$$q(x) = q_o \frac{x}{L}$$

La RISULTANTE ELEMENTARE del carico distribuito su un tratto dx vale:

$$dF = q(x)dx$$

(essendo q(x) il valor medio del carico distribuito sul tratto dx).



La FORZA RISULTANTE F sarà la somma dei contributi elementari:

$$F = \int_0^L dF = \int_0^L q_o \frac{x}{L} dx = \frac{q_o}{L} \int_0^L x dx = \frac{q_o}{L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{q_o}{L} \frac{L^2}{2} = \frac{q_o L^2}{2}$$

che è l'AREA DEL TRIANGOLO.

POSIZIONE DELLA RISULTANTE

Il MOMENTO DELLA RISULTANTE rispetto al PUNTO A deve essere uguale alla SOMMA dei MOMENTI ELEMENTARI rispetto al punto A.

Il MOMENTO DELLA RISULTANTE rispetto al punto A vale:

$$M = F \times b = \frac{q_o L}{2} \times b$$

Il MOMENTO ELEMENTARE relativo al tratto dx vale:

$$dM = dF \times x = \frac{q_o x}{L} x dx = \frac{q_o x^2}{L} dx$$

Il MOMENTO TOTALE sarà:

$$M = \int_0^L dM = \int_0^L \frac{q_o x^2}{L} dx = \frac{q_0}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{q_0}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{q_0}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{q_o L^2}{3}$$

UGUAGLIANDO le due espressioni di M, si ha:

$$\frac{q_o L}{2} b = \frac{q_o L^2}{3}$$

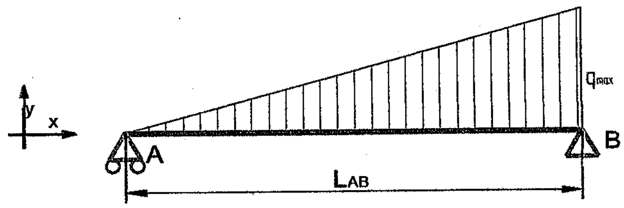
da cui:

$$b = \frac{2}{3} L$$

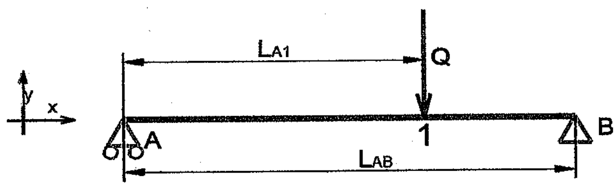
che è l'ascissa del BARICENTRO DEL TRIANGOLO.

# Risoluzione di una trave soggetta ad un carico triangolare

Nella figura riportata è indicata una trave sottoposta ad un carico continuo ad andamento triangolare dove il valore massimo sia $q_{max}$




Come prima cosa si calcola il carico localizzato **Q,** equivalente al carico continuo applicato, e la sua posizione; sia $L_{A1}$ la sua distanza dalla sezione A.




Il modulo di **Q** si ricava valutando l'area del carico continuo applicato, avendo questo andamento triangolare si ha:

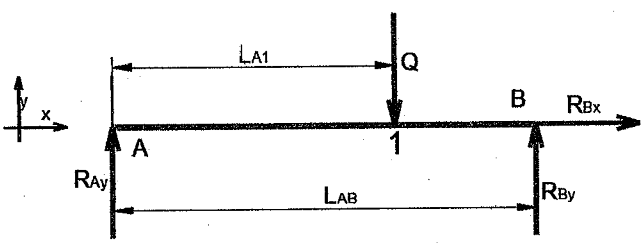
$$Q=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{2}$$

Questo carico passerà per il baricentro dell'area che rappresenta il carico applicato, ,e quindi:

$$L_{A1}=\frac{2}{3}L_{AB}$$

*Calcolo delle reazioni vincolari.*

Si disegna il *corpo libero associato* ottenuto sostituendo i vincoli con le relative reazioni vincolari




Si applicano quindi a detto corpo le equazioni cardinali della statica:

$$\sum F_x=0 \qquad \sum F_y=0 \qquad \sum M_z=0$$

ottenendo:

$$R_{Bx}=0 \qquad R_{Ay}-Q+R_{By}=0 \qquad Q\cdot L_{A1}-R_{By}\cdot L_{AB}=0$$

Risolvendo si ha:

$$R_{By}=\frac{Q\cdot L_{A1}}{L_A} \quad \rightarrow \quad R_{By}=\frac{Q\cdot\frac{2}{3}L_{AB}}{L_{AB}} \quad \rightarrow \quad R_{By}=\frac{2}{3}Q$$

ricordando il valore di **Q**

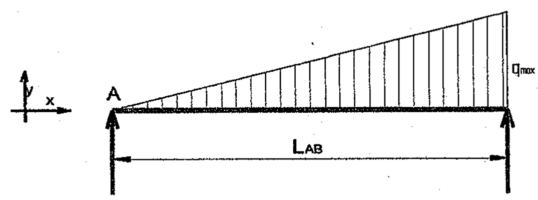
$$R_{By}=\frac{2}{3}\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{2}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{3}$$

e

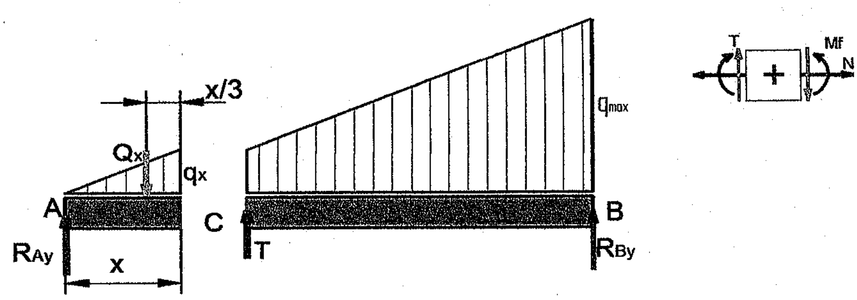
$$R_{Ay}=Q-R_{By}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{2}-\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{3}=\frac{q_{max}\cdot L_{Ab}}{6}$$

*Diagramma caratteristiche azioni esterne*

Si analizza la trave con il carico continuo applicato e con le reazioni vincolari appena calcolate.




Si consideri una sezione C posta ad una distanza x dalla sezione A ( estremità sinistra della trave) e si ipotizza di tagliare la trave in due tratti AC ed AB.
Se si vuole che i due tratti inizialmente fermi rimangano fermi anche dopo il taglio si devono applicare su ognuno delle forze e dei momenti pari a quelli che sono stati eliminati con la separazione.




In pratica se si vuole che il tratto CB non abbia alcuna traslazione si deve applicare in C una forza T equivalente al carico continuo $Q_x$ ed alla reazioni $R_{Ay}$ eliminati al moneto del taglio

$$T=R_{Ay}-Q_x$$

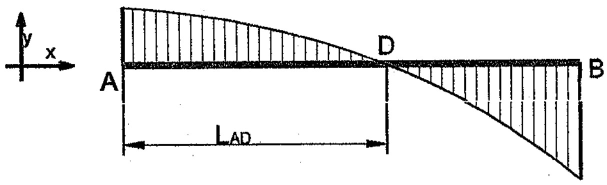
analizzando il carico triangolare è facile rilevare che

$$q_x=\frac{x}{L_{AB}}q_{max} \quad \text{da cui} \quad Q_x=\frac{q_x\cdot x}{2}=\frac{q_{max}\cdot x^2}{2\cdot L_{AB}}$$

infine si ha:

$$T=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{6}-\frac{q_{max}\cdot x^2}{2\cdot L_{AB}}$$

che rappresenta una parabola, come riportata in figura.

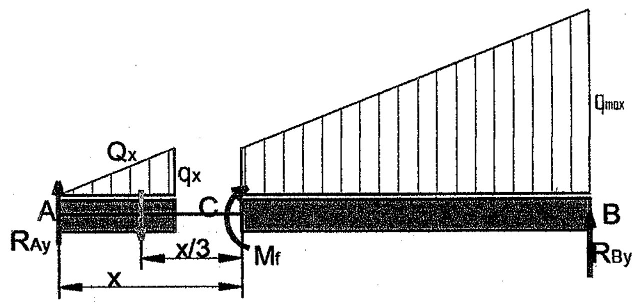



si ricava la sezione dove il taglio è nullo

$$\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{6}-\frac{q_{max}\cdot x^2}{2\cdot L_{AB}}=0 \qquad \frac{L_{AB}}{6}=\frac{x^2}{2\cdot L_{AB}} \qquad x^2=\frac{L_{AB}^2}{3}$$

$$L_{AD}=\frac{L_{AB}}{\sqrt{3}}$$

Per il momento flettente si ha:



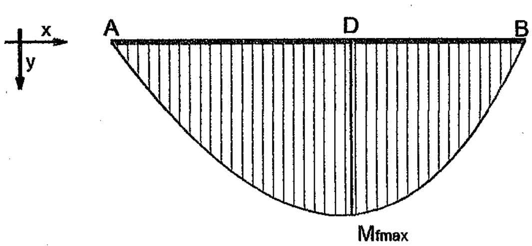

Il momento $M_f$ agente nella sezione C, della parte destra della trave, sarà dato dalla somma algebrica tra il momento generato da $R_{Ay}$ (positivo) e quello generato da $Q_x$ ( negativo)

$$M_R=R_{Ay}\cdot x \qquad M_Q=-Q_x\cdot\frac{x}{3}$$

$$M_f=M_R+M_Q=R_{Ay}\cdot x-Q_x\cdot\frac{x}{3}$$

$$M_f=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{6}\cdot x-\frac{q_{max}\cdot x^2}{2\cdot L_{AB}}\cdot\frac{x}{3}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{6}\cdot x-\frac{q_{max}}{6\cdot L_{AB}}\cdot x^3$$

anch'esso ha un andamento parabolico, come riportato in figura (il diagramma è riportato sul lato fibre tese)




esso assume il valore massimo nella sezione dove il taglio è nullo

Si calcola infine l'intensità del momento flettente massima.

$$M_{max}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}}{6}\cdot\frac{L_{AB}}{\sqrt{3}}-\frac{q_{max}}{6\cdot L_{AB}}\cdot\left(\frac{L_{AB}}{\sqrt{3}}\right)^3$$

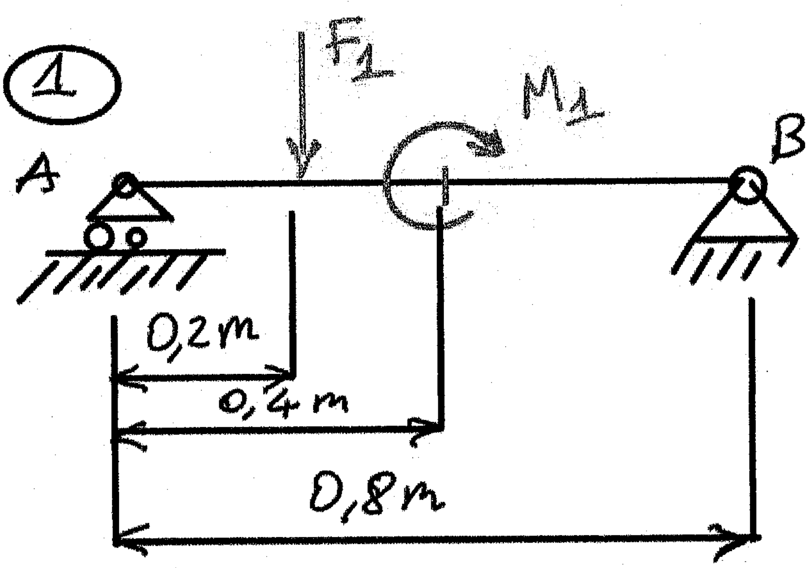
$$M_{max}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}^2}{6\cdot\sqrt{3}}-\frac{q_{max}\cdot L_{AB}^3}{6\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot L_{AB}}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}^2}{6\cdot\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$M_{max}=\frac{q_{max}\cdot L_{AB}^2}{9\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{27}\cdot q_{max}\cdot L_{AB}^2$$

CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI

NEI SEGUENTI CASI:.

1



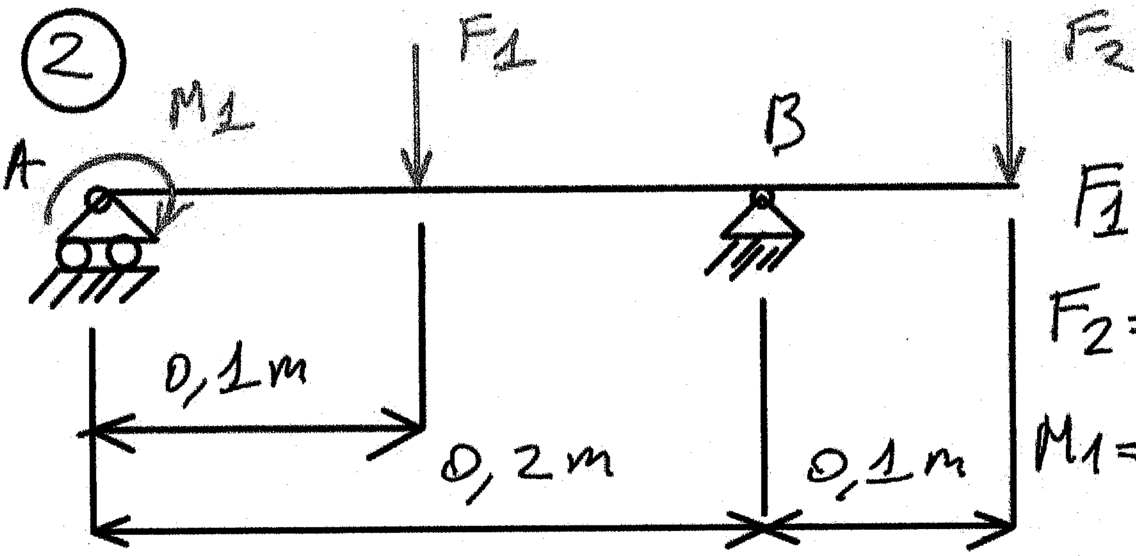

$F_1 = 400 N$

$M_1 = 160 Nm$

$V_A =$ $V_B =$ $H_B =$

---

2



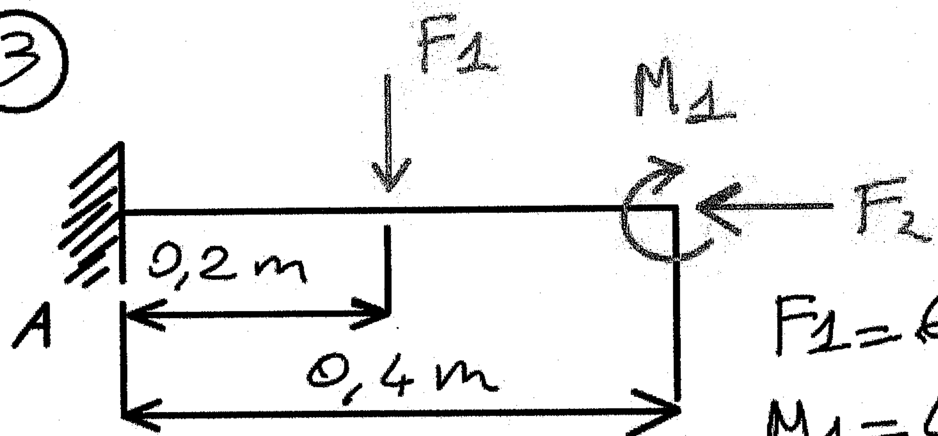

$F_1 = 200 N$

$F_2 = 300 N$

$M_1 = 200 Nm$

$V_A =$ $V_B =$ $H_B =$

3




$F_1 = 600\,N$

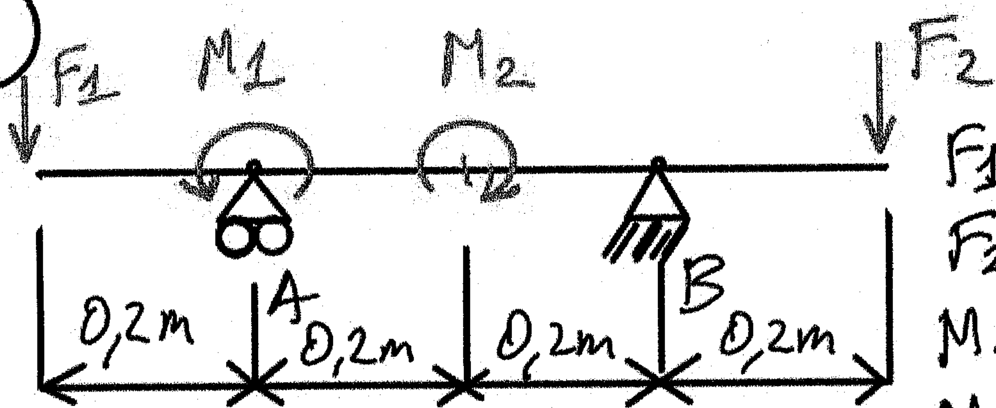
$M_1 = 400\,Nm$

$F_2 = 80\,N$

$V_A =$ $\qquad H_A =$ $\qquad M_A =$

---

4




$F_1 = 200\,N$

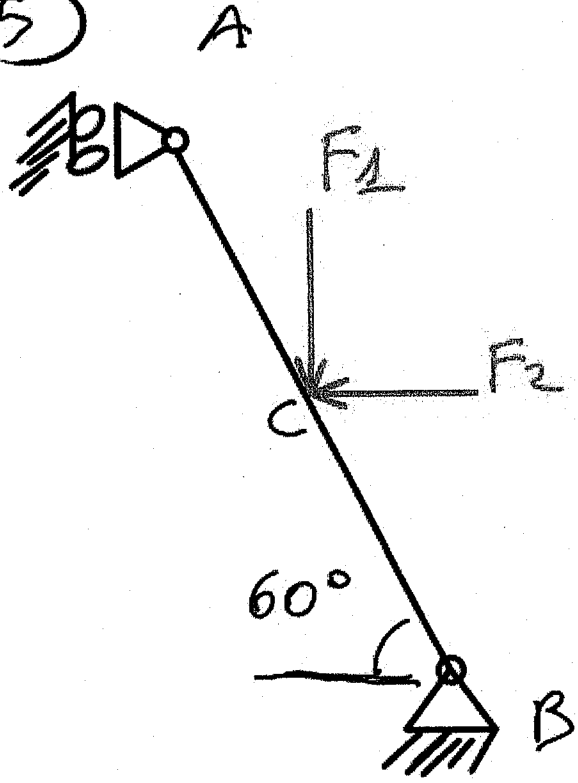
$F_2 = 300\,N$

$M_1 = 200\,Nm$

$M_2 = 300\,Nm$

$V_A =$ $\qquad V_B =$ $\qquad H_B =$

⑤




$\overline{AB} = 2\,m$

C: punto medio del segmento $\overline{AB}$

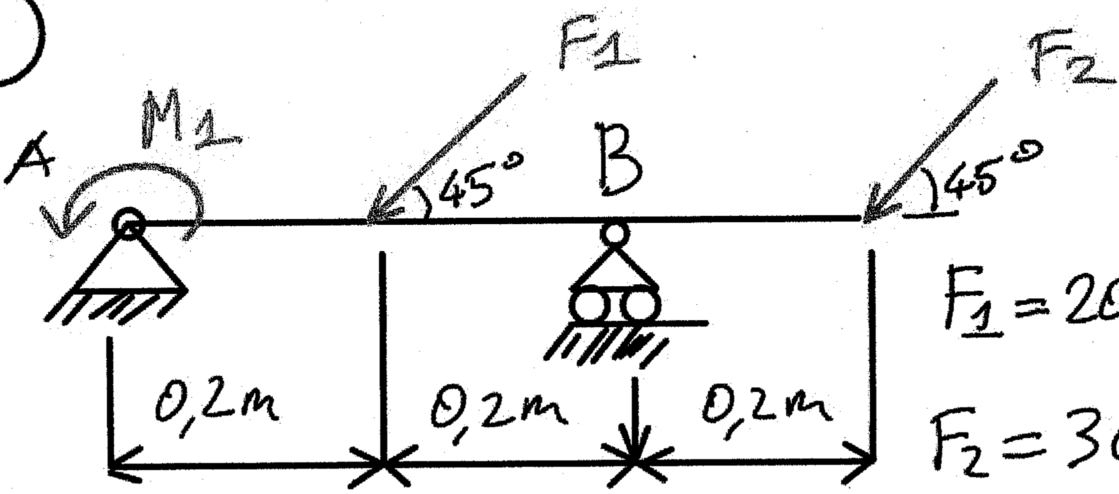
$F_1 = 400\,N$

$F_2 = 200\,N$

$H_A =$ $\qquad$ $H_B =$ $\qquad$ $V_B =$

---

⑥

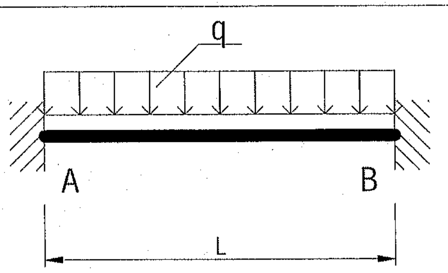
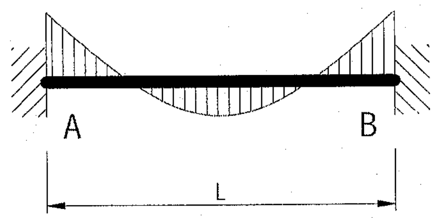
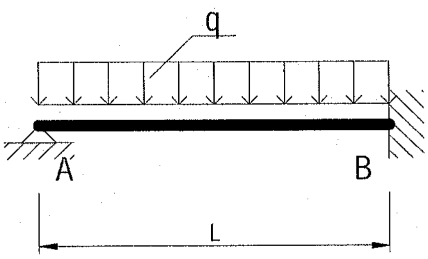
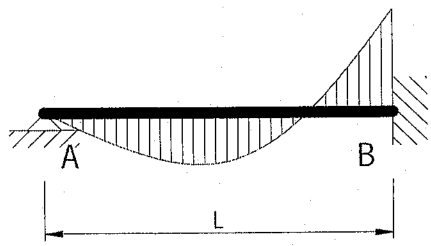
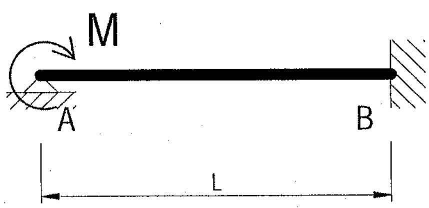
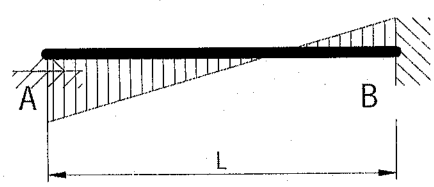
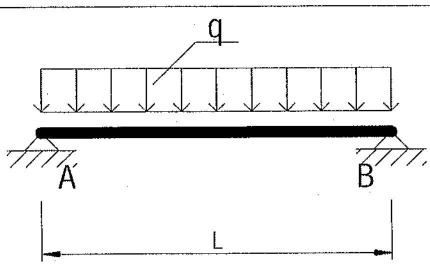
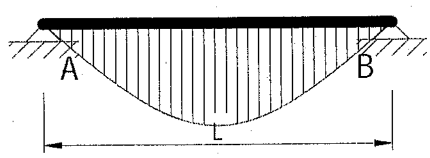
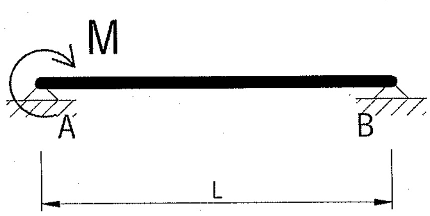
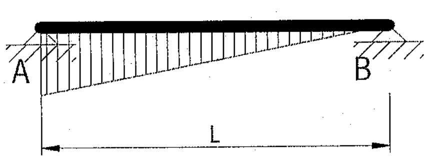


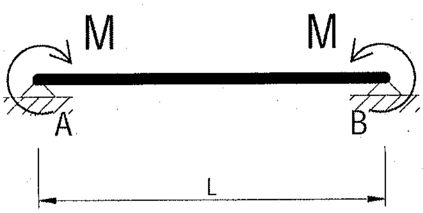

$F_1 = 200 \cdot \sqrt{2}\ N$

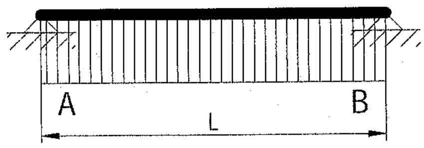
$F_2 = 300 \cdot \sqrt{2}\ N$

$M_1 = 800\ Nm$

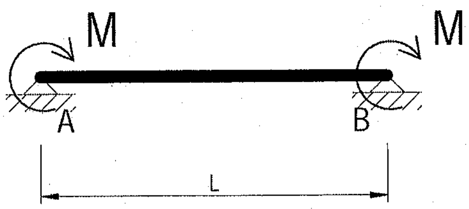
$V_A =$ $\qquad$ $H_A =$ $\qquad$ $V_B =$

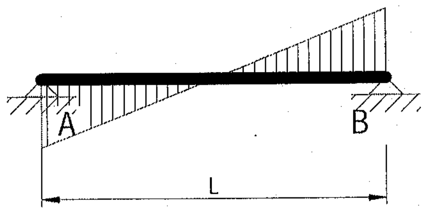
| SCHEMA | DIAGRAMMA DEL MOMENTO | |
|---|---|---|
|  |  | $M_A = M_B = \frac{qL^2}{12}$<br>$M_{mezz} = \frac{qL^2}{24}$ |
|  |  | $M_B = \frac{qL^2}{8}$<br>$M_{mezz} = \frac{qL^2}{16}$ |
|  |  | $M_A = \overline{M}$<br>$M_B = \frac{\overline{M}}{2}$ |
|  |  | $M_{mezz} = \frac{qL^2}{8}$ |
|  |  | $M_A = \overline{M}$<br>$M_B = 0$ |



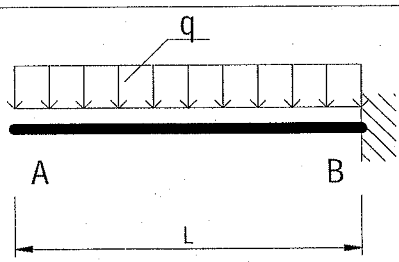



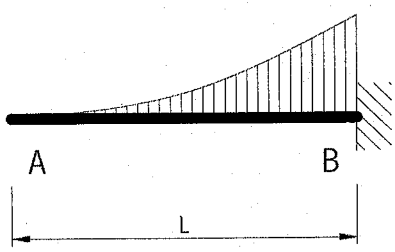

$$M_A = M_B = \overline{M}$$



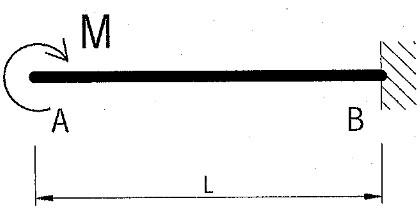



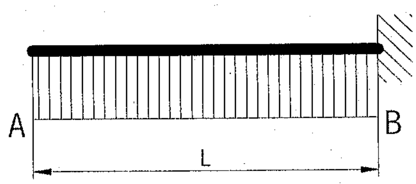

$$M_A = M_B = \overline{M}$$



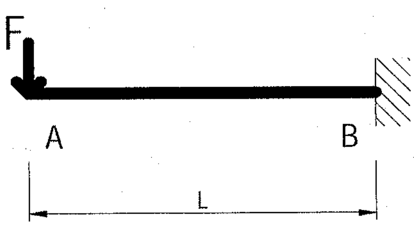



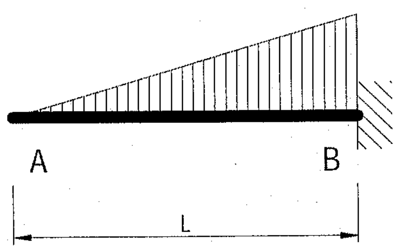

$$M_B = \frac{qL^2}{2}$$




$$M_A = M_B = \overline{M}$$



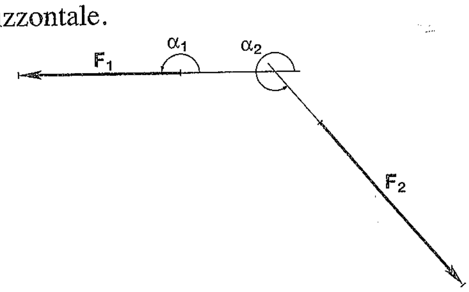

$$M_B = FL$$

# ESERCIZI



## Composizione di forze

**1** Calcolare analiticamente e graficamente con la regola del parallelogramma la risultante delle due forze $F_1 = -60$ N e $F_2 = 80$ N, che formano con l'orizzontale rispettivamente gli angoli $\alpha_1 = 180°$ e $\alpha_2 = 310°$.
Calcolare inoltre l'angolo $\beta$, che la risultante forma con l'orizzontale.




[$R \approx 61{,}88$ N; $\beta \approx 262°{,}03$]

**2** Le tre forze

$F_1 = 12$ kN $\quad F_2 = 8$ kN $\quad F_3 = 18$ kN

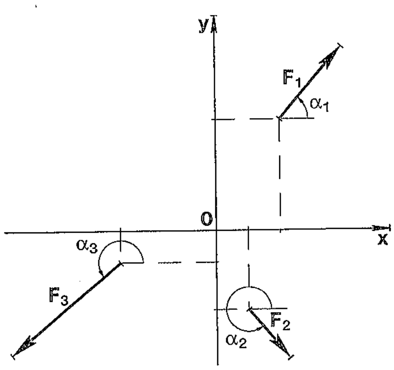
sono rispettivamente applicate in punti definiti dalle coordinate cartesiane espresse in millimetri:

$A \equiv (40, 70) \quad B \equiv (20, -50) \quad C \equiv (-60, -20)$

e sono inclinate dei seguenti angoli, misurati in senso antiorario, rispetto all'orizzontale:

$\alpha_1 = 50° \quad \alpha_2 = 310° \quad \alpha_3 = 220°$

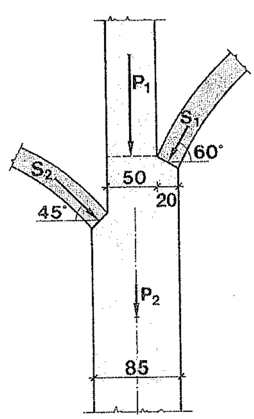
Determinare la risultante e l'angolo da essa formato con l'orizzontale.




[$R = 8{,}56$ kN; $\alpha \approx 263°{,}76$]

**3** Il muro di un fabbricato ha il peso $P_2 = 60$ kN ed è gravato alla sommità dal carico $P_1 = 200$ kN, mentre lateralmente si scaricano le volte dei due locali adiacenti che trasmettono le spinte $S_1 = 80$ kN ed $S_2 = 120$ kN.
Calcolare graficamente l'intensità della risultante.

[$R \approx 416{,}55$ kN]

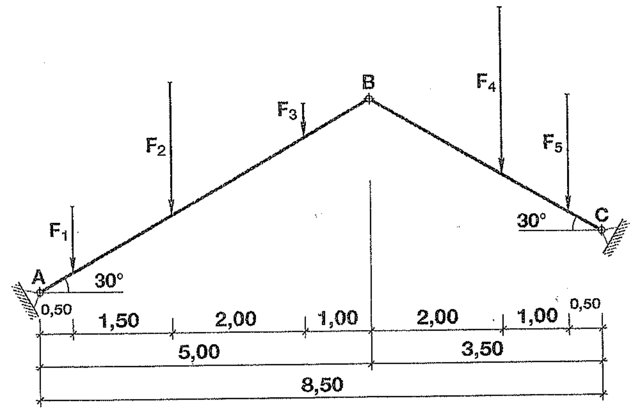



**4** Tre aste unite a cerniera nei punti $A, B, C$ sono soggette ai seguenti carichi

$F_1 = 2$ kN $\quad F_2 = 4$ kN $\quad F_3 = 1$ kN

$F_4 = 5$ kN $\quad F_5 = 3{,}5$ kN

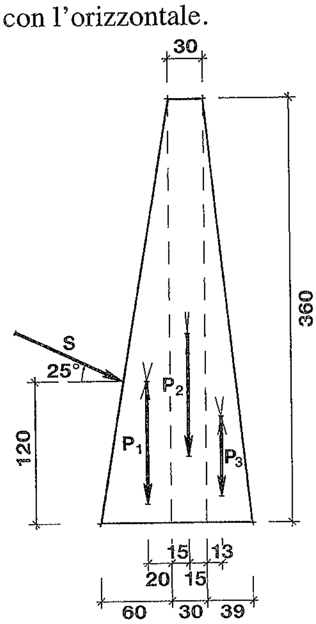
Determinare graficamente le componenti di reazione nelle cerniere $A$ e $C$ e l'intensità della mutua azione che le aste si trasmettono in corrispondenza della cerniera $B$. (Le azioni vengono determinate tracciando il poligono funicolare che connette le forze passanti per i punti $A, B, C$, come nell'Esercizio svolto 5).




[$R_A \approx 8{,}50$ kN; $R_B \approx 4{,}60$ kN; $R_C \approx 9{,}60$ kN]

## Poligono di successive risultanti

**5** Il muro in figura (quote in cm) è realizzato in calcestruzzo semplice con un peso volumico di 24 kN/m$^3$ ed è soggetto alla spinta $S = 25$ kN/m.
Considerando 1,00 m di lunghezza del muro, calcolare il suo peso considerando la sezione suddivisa come in figura e determinare la risultante delle forze applicate analiticamente e graficamente con il metodo del poligono di successive risultanti, calcolando anche l'angolo che forma con l'orizzontale.




[$R \approx 82{,}44$ kN; $\alpha \approx 285°{,}95$]

**4** Determinare con procedimento grafico e analitico la risultante del sistema di quattro forze complanari:

$F_1 = 80$ N $\quad F_2 = 50$ N $\quad F_3 = 30$ N $\quad F_4 = 60$ N

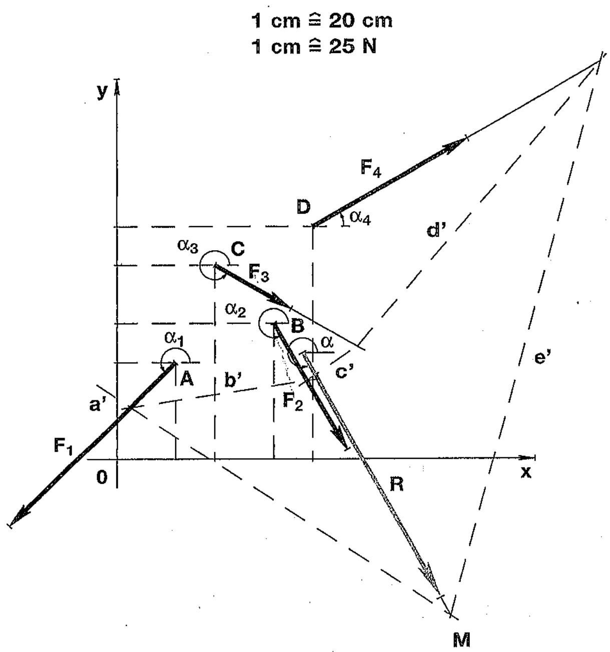
applicate rispettivamente nei punti:

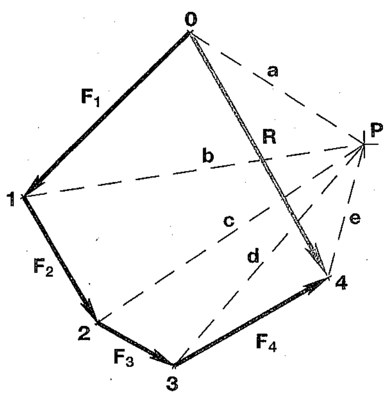
$A \equiv (15; 25) \quad B \equiv (40; 35) \quad C \equiv (25; 50) \quad D \equiv (50; 60)$

che formano con l'orizzontale gli angoli:

$\alpha_1 = 225° \quad \alpha_2 = 300° \quad \alpha_3 = 330° \quad \alpha_4 = 30°$

Calcolare inoltre l'angolo formato dalla risultante con l'orizzontale.




### Procedimento grafico

Si traccia il poligono delle forze, il cui lato di chiusura 0 - 4 individua la risultante $R$.

Proiettato il poligono delle forze da un polo $P$ scelto a piacere, vengono tracciate le parallele ai raggi proiettanti ottenendo il poligono funicolare e si prolunga il suo primo e ultimo lato fino alla loro intersezione in $M$, che rappresenta un punto della risultante per il quale viene tracciata equipollente al lato di chiusura 0 - 4.

### Procedimento analitico

Si calcolano le componenti cartesiane delle forze date, tramite le quali si ottengono le componenti $R_x$ ed $R_y$ della risultante.

Componenti orizzontali:

$$F_{1-x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 80 \times \cos 225° \approx -56{,}57 \text{ N}$$

$$F_{2-x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 50 \times \cos 300° \approx +25{,}00 \text{ N}$$

$$F_{3-x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 30 \times \cos 330° \approx +25{,}98 \text{ N}$$

$$F_{4-x} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 60 \times \cos 30° \approx +51{,}96 \text{ N}$$

$$R_x = \Sigma F_x = +46{,}37 \text{ N}$$

Componenti verticali:

$$F_{1-y} = F_1 \cdot \text{sen } \alpha_1 = 80 \times \text{sen } 225° \approx -56{,}57 \text{ N}$$

$$F_{2-y} = F_2 \cdot \text{sen } \alpha_2 = 50 \times \text{sen } 300° \approx -43{,}30 \text{ N}$$

$$F_{3-y} = F_3 \cdot \text{sen } \alpha_3 = 30 \times \text{sen } 330° \approx -15{,}00 \text{ N}$$

$$F_{4-y} = F_4 \cdot \text{sen } \alpha_4 = 60 \times \text{sen } 30° \approx +30{,}00 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = -84{,}87 \text{ N}$$

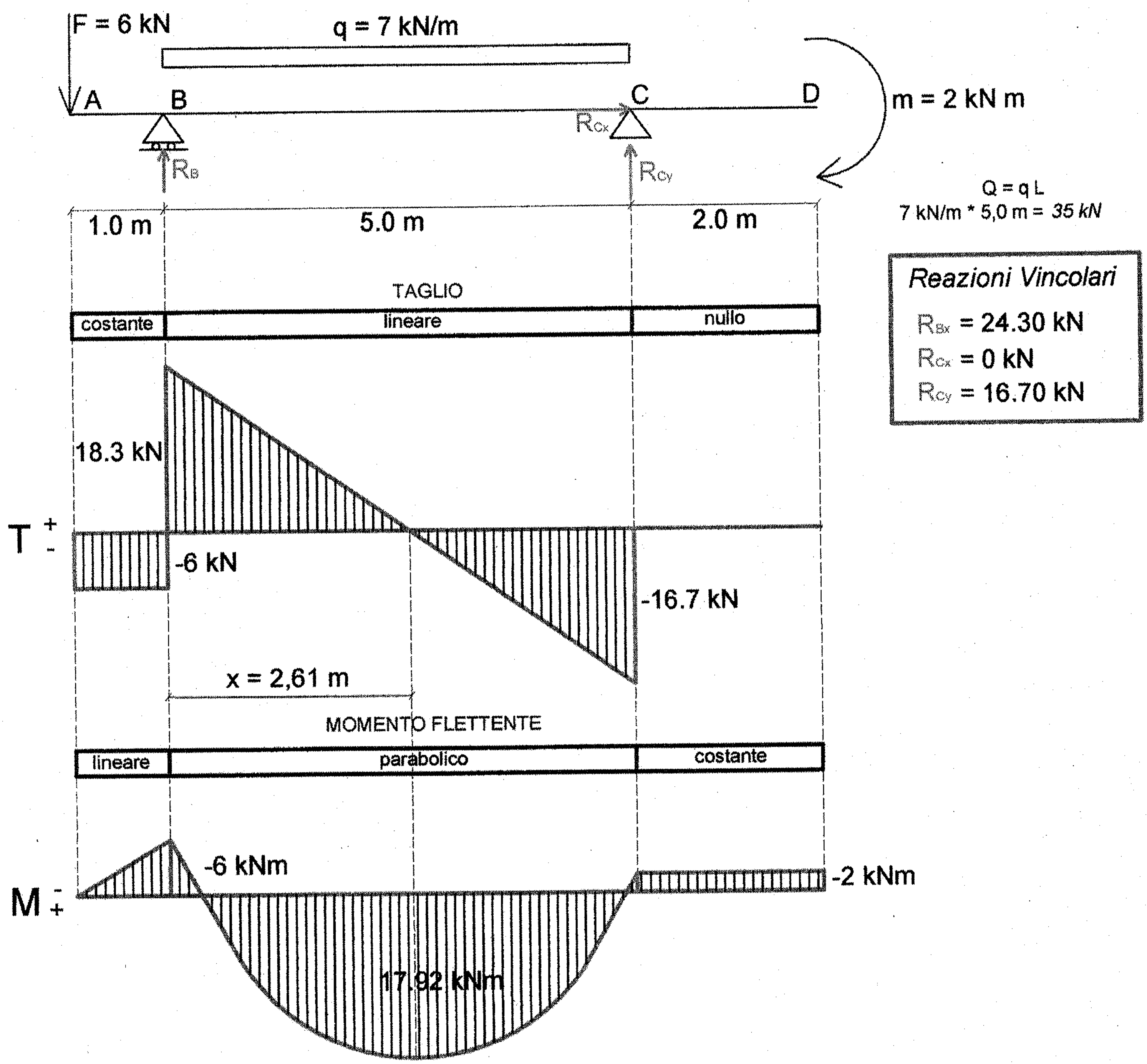
Il modulo della risultante vale:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{46{,}47^2 + (-84{,}87)^2} \approx 96{,}76 \text{ N}$$

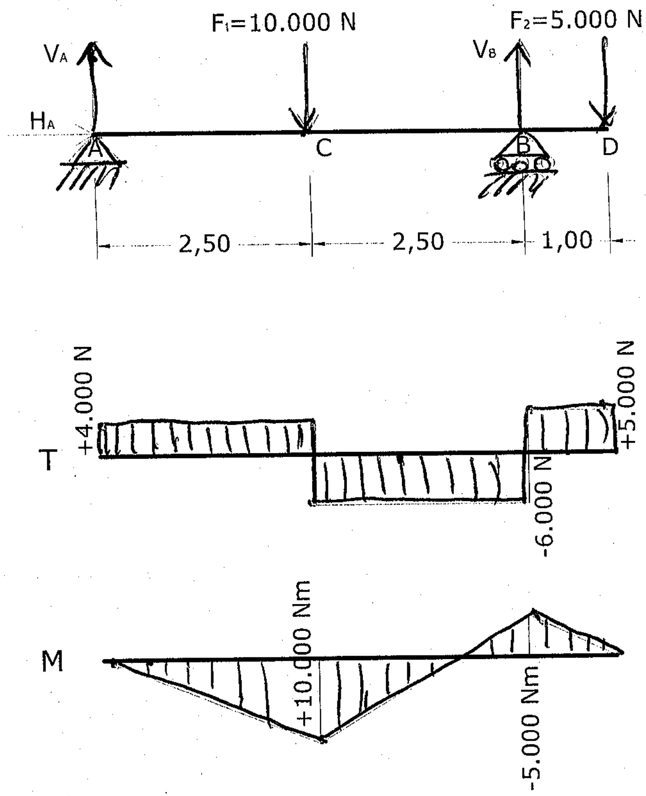
La retta di azione della risultante $R$ forma con l'orizzontale l'angolo:

$$\alpha = \text{arctg } \frac{R_y}{R_x} = \text{arctg } \frac{-84{,}87}{+46{,}37} \approx \text{arctg } (-1{,}83) \approx 61°, 35$$

ma è anche $\alpha = 360° - 61°{,}35 = 298°{,}65$ in quanto la tangente è negativa nel II e IV quadrante, però essendo $R_x$ positiva ed $R_y$ negativa, il vettore $R$ deve trovarsi nel IV quadrante, per cui la soluzione è $\alpha = 298°{,}65$.


F = 6 kN
q = 7 kN/m
A
B
C
D
m = 2 kN m
RCx
RB
RCy
Q = q L
7 kN/m * 5,0 m = 35 kN
1.0 m
5.0 m
2.0 m
Reazioni Vincolari
RBx = 24.30 kN
RCx = 0 kN
RCy = 16.70 kN
TAGLIO
costante
lineare
nullo
18.3 kN
T + -
-6 kN
-16.7 kN
x = 2,61 m
MOMENTO FLETTENTE
lineare
parabolico
costante
-6 kNm
M - +
-2 kNm
17.92 kNm

Esercizio n. 1




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\sum V = 0 \rightarrow V_A - 10.000 + V_B - 5.000 = 0$

$\sum M^A = 0 \rightarrow 10.000 \cdot 2{,}5 - V_B \cdot 5 + 5.000 \cdot 6 = 0$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{25.000 + 30.000}{5} = \frac{55.000}{5} = 11.000\,\mathrm{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$V_A = 10.000 - 11.000 + 5.000 = 4.000\,\mathrm{N}$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$T_A = V_A = 4.000\,\mathrm{N}$

$T_C^{'} = T_A$

$T_C^{''} = T_C^{'} - F_1 = 4.000 - 10.000 = -6.000\,\mathrm{N}$

$T_B^{'} = T_C^{''} = -6.000\,\mathrm{N}$

$T_B^{''} = T_B^{'} + 11.000 = -6.000 + 11.000 = 5.000\,\mathrm{N}$

$T_D = T_B^{''} = 5.000\,\mathrm{N}$

$M_A = 0$

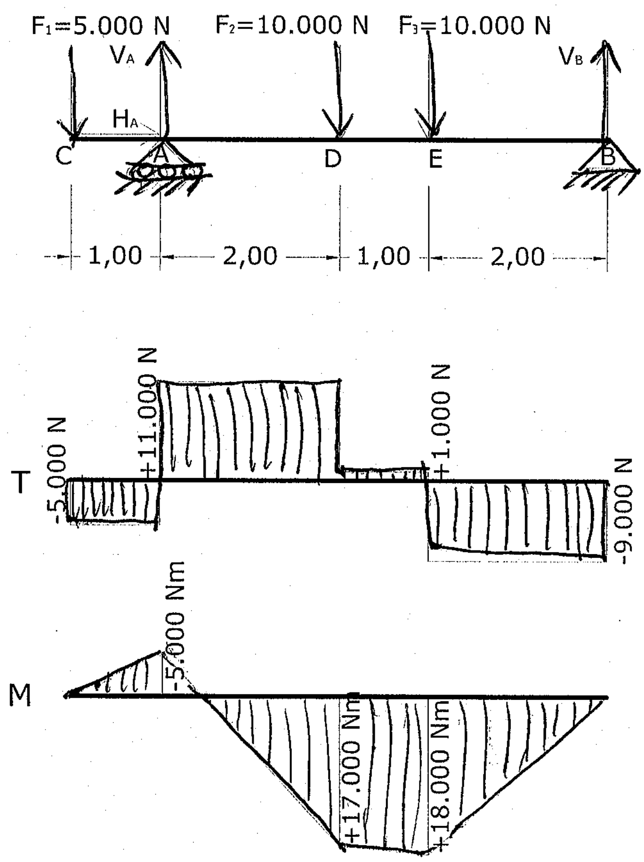
$M_C = V_A \cdot 2{,}50 = 4.000 \cdot 2{,}50 = 10.000\,\mathrm{Nm}$

$M_B = V_A \cdot 5 - F_1 \cdot 2{,}50 = 4.000 \cdot 5 - 10.000 \cdot 2{,}50 = -5.000\,\mathrm{Nm}$

$M_B = -F_2 \cdot 1 = -5.000 \cdot 1 = -5.000\,\mathrm{Nm}$

$M_D = 0$

Esercizio n. 2




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\sum V = 0 \rightarrow$

$-5.000 + V_A - 10.000 - 10.000 + V_B = 0$

$\sum M^A = 0 \rightarrow$

$-5.000 \cdot 1 + 10.000 \cdot 2 + 10.000 \cdot 3 - V_B \cdot 5 = 0$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{-5.000 + 20.000 + 30.000}{5} = \frac{45.000}{5} =$$

$= 9.000\,\text{N}$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$V_A = 5.000 + 10.000 + 10.000 - 9.000 = 16.000\,\text{N}$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$T_C = -F_1 = -5.000\,\text{N}$

$T_A^{'} = T_C$

$T_A^{''} = T_A^{'} + V_A = -5.000 + 16.000 = 11.000\,\text{N}$

$T_D^{'} = T_A^{''}$

$T_D^{''} = T_D^{'} - F_2 = 11.000 - 10.000 = 1.000\,\text{N}$

$T_E^{'} = T_D^{''}$

$T_E^{''} = T_E^{'} - F_3 = 1.000 - 10.000 = -9.000\,\text{N}$

$T_B = T_E^{''} = -9.000\,\text{N}$

$M_C = 0$

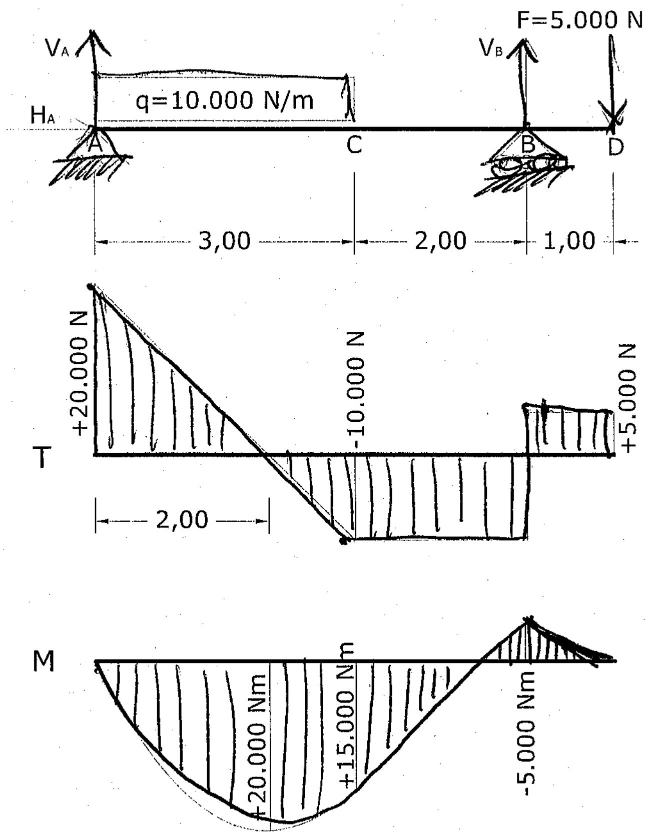
$M_A = -F_1 \cdot 1 = -5.000 \cdot 1 = -5.000\,\text{Nm}$

$M_D = -F_1 \cdot 3 + V_A \cdot 2 = -5.000 \cdot 3 + 16.000 \cdot 2 = 17.000\,\text{Nm}$

$M_E = -F_1 \cdot 4 + V_A \cdot 3 - F_2 \cdot 1 = -5.000 \cdot 4 + 16.000 \cdot 3 - 10.000 \cdot 1 = 18.000\,\text{Nm}$

$M_B = 0$

Esercizio n. 3




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - 10.000 \cdot 3 + V_B - 5.000 = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow 10.000 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - V_B \cdot 5 + 5.000 \cdot 6 = 0$$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{45.000 + 30.000}{5} = \frac{75.000}{5} = 15.000\,\text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A = 30.000 - 15.000 + 5.000 = 20.000\,\text{N}$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$T_A = V_A = 20.000\,\text{N}$$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{\text{iniziale}}}{q} = \frac{20.000}{10.000} = 2.00\,\text{m}$$

$$T_C = T_A - q \cdot 3 = 20.000 - 10.000 \cdot 3 = -10.000\,\text{N}$$

$$T_B' = T_C$$

$$T_B'' = T_B' + V_B = -10.000 + 15.000 = 5.000\,\text{N}$$

$$T_D = T_B'' = 5.000\,\text{N}$$

$$M_A = 0$$

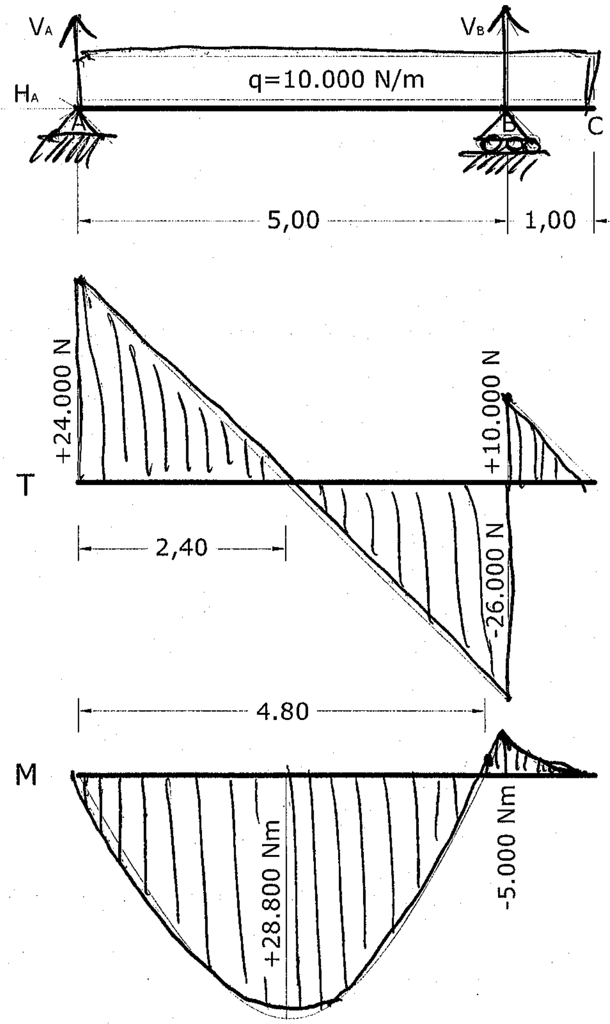
$$M_{max} = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 20.000 \cdot 2 - \frac{10.000 \cdot 2^2}{2} = 20.000\,\text{Nm}$$

$$M_C = V_A \cdot 3 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = 20.000 \cdot 3 - \frac{10.000 \cdot 3^2}{2} = 15.000\,\text{Nm}$$

$$M_B = -F \cdot 1 = -5.000 \cdot 1 = -5.000\,\text{Nm}$$

$$M_D = 0$$

Esercizio n. 4




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\sum V = 0 \rightarrow V_A - 10.000 \cdot 6 + V_B = 0$

$\sum M^A = 0 \rightarrow 10.000 \cdot 6 \cdot 3 - V_B \cdot 5 = 0$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{180.000}{5} = 36.000\,\text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A = 60.000 - 36.000 = 24.000\,\text{N}$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$T_A = V_A = 24.000\,\text{N}$$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{iniziale}}{q} = \frac{24.000}{10.000} = 2{,}40\,\text{m}$$

$$T_B^{'} = T_A - q \cdot 5 = 24.000 - 10.000 \cdot 5 = -26.000\,\text{N}$$

$$T_B^{''} = T_B^{'} + V_B = -26.000 + 36.000 = 10.000\,\text{N}$$

$$T_D = T_B^{''} - 10.000 \cdot 1 = 10.000 - 10.000 = 0$$

$$M_A = 0$$

$$M_{max} = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 24.000 \cdot 2{,}40 - \frac{10.000 \cdot 2{,}40^2}{2} = 28.800\,\text{Nm}$$

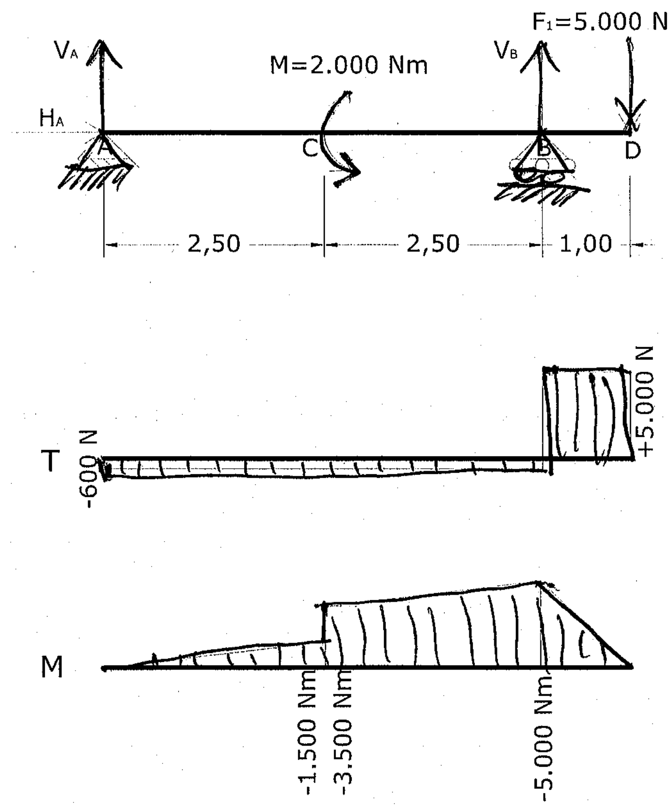
$$M_B = V_A \cdot 5 - \frac{q \cdot 5^2}{2} = 24.000 \cdot 5 - \frac{10.000 \cdot 5^2}{2} = -5.000\,\text{Nm}$$

$$M_B = -q \cdot 1 \cdot 0{,}50 = -10.000 \cdot 1 \cdot 0{,}50 = -5.000\,\text{Nm}$$

$$M_C = 0$$

$$M(x) = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 0 \text{ per } x = 0 \text{ e per } x = \frac{2 \cdot V_A}{q} = \frac{2 \cdot 24.000}{10.000} = 4{,}80\,\text{m}$$

Esercizio n. 5




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - 5.000 + V_B = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow -2.000 - V_B \cdot 5 + 5.000 \cdot 6 = 0$$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{28.000}{5} = 5.600\,\text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A = 5.000 - 5.600 = -600\,\text{N}$$

Il fatto che $V_A$ sia negativa significa che il verso ipotizzato è errato e che la reazione è rivolta verso il basso.

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$T_A = V_A = -600\ \text{N}$$

$$T_B^{'} = T_A = -600\ \text{N}$$

$$T_B^{''} = T_B^{'} + V_B = -600 + 5.600 = 5.000\ \text{N}$$

$$T_D = T_B^{''} = 5.000\ \text{N}$$

$$M_A = 0$$

$$M_C^{'} = -600 \cdot 2{,}50 = -1.500\,\text{Nm}$$

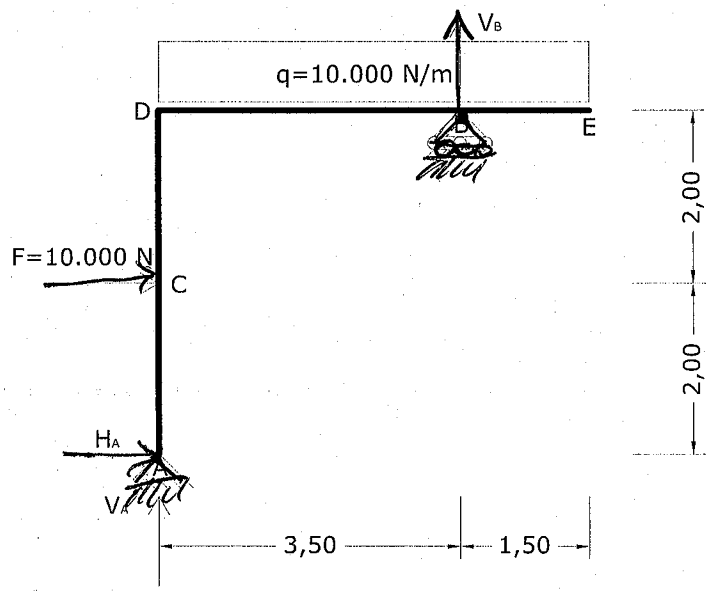
$$M_C^{''} = M_C^{'} - 2.000 = -3.500\,\text{Nm}$$

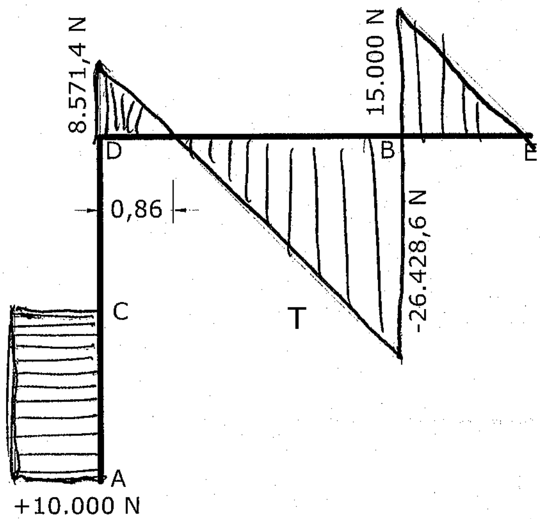
$M_B = -600 \cdot 5 - 2.000 = -5.000\,\text{Nm}$ (guardando a sinistra della sezione)

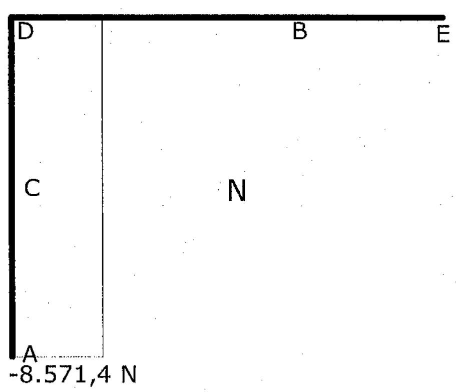
$M_B = -5.000 \cdot 1 = -5.000\,\text{Nm}$ (guardando a destra della sezione)

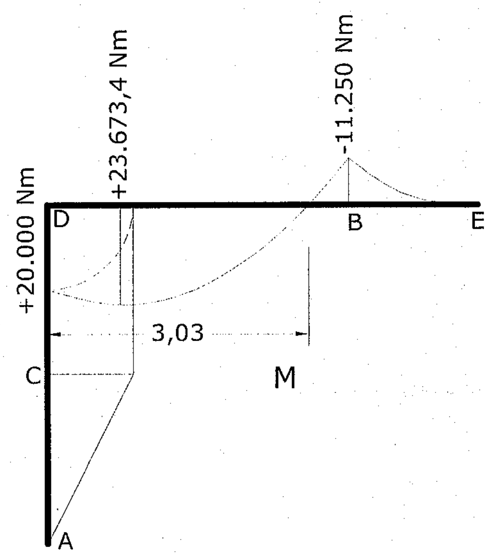
$$M_C = 0$$

# Esercizio n. 6




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$\sum H = 0 \;\rightarrow H_A + 10.000 = 0$

$\sum V = 0 \;\rightarrow V_A - 10.000 \cdot 5 + V_B = 0$

$\sum M^A = 0 \;\rightarrow 10.000 \cdot 2 + 10.000 \cdot 5 \cdot 2{,}50 - V_B \cdot 3{,}50 = 0$

Dalla prima equazionedi ricava:

$H_A = -10.000 \text{ N}$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{145.000}{3{,}50} = 41.428{,}6 \text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$V_A = 50.000 - 41.428{,}6 = 8.571{,}4 \text{N}$

Il fatto che $H_A$ sia negativa significa che il verso ipotizzato è errato e che la reazione è rivolta verso sinistra. Bisognerà tenerne debito conto nel calcolo delle sollecitazioni.

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$N_A \quad V_A \quad 8.571{,}4\,N$

$N'_D \equiv N_A \quad = -$

$N''_D = N_B = N_E = 0$

$T_A = -H_A = 10.000\,N$

$T'_C = T_A$

$T''_C = T'_C - F = 10.000 - 10.000 = 0$

$T'_D = T''_C$

$T''_D = V_A = 8.571{,}4\,N$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{iniziale}}{q} = \frac{8.571{,}4}{10.000} = 0{,}86\,m$$

$T'_B = T''_D - 10.000 \cdot 3{,}50 = 8.571{,}4 - 35.000 = -26.428{,}6\,N$

$T''_B = T'_B + V_B = -26.428{,}6 + 41.428{,}6 = 15.000\,N$

$T_E = 0$

$M_A = 0$

$M_C = -H_A \cdot 2 = 10.000 \cdot 2 = 20.000\,Nm$

$M_D = -H_A \cdot 4 - F \cdot 2 = 10.000 \cdot 4 - 10.000 \cdot 2 = 20.000\,Nm$

$$M_{max} = -H_A \cdot 4 - F \cdot 2 + V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} =$$

$$= 10.000 \cdot 4 - 10.000 \cdot 2 + 8.571{,}4 \cdot 0{,}86 - \frac{10.000 \cdot 0{,}86^2}{2} = 23.673{,}4\,Nm$$

$$M_B = -H_A \cdot 4 - F \cdot 2 + V_A \cdot 3{,}50 - \frac{q \cdot 3{,}50^2}{2} = 10.000 \cdot 4 - 10.000 \cdot 2 + 8.571{,}4 \cdot 3{,}50 - \frac{10.000 \cdot 3{,}50^2}{2} =$$

$= -11.250\,Nm$ (guardando a sinistra della sezione)

$M_B = -q \cdot 1{,}50 \cdot 0{,}75 = -10.000 \cdot 1{,}50 \cdot 0{,}75 = -11.250\,Nm$ (guardando a destra della sezione)

$M_C = 0$

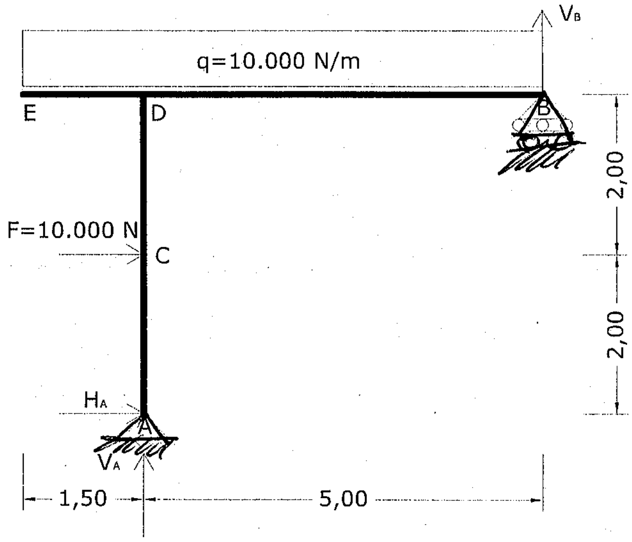
$$M(x) = -H_A \cdot 4 - F \cdot 2 + V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 20.000 + 8571{,}4 \cdot x - \frac{10.000 \cdot x^2}{2} = 0$$

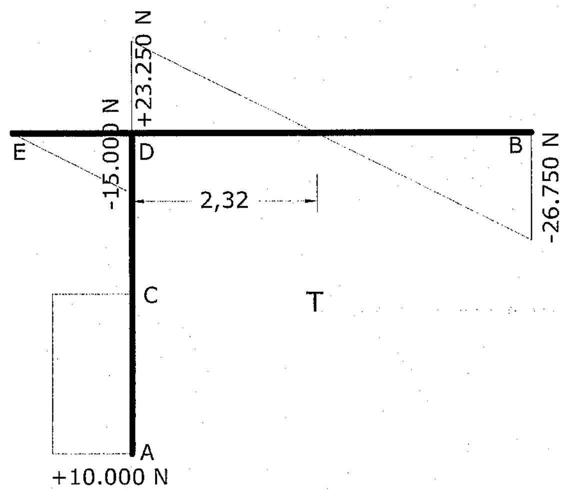
per

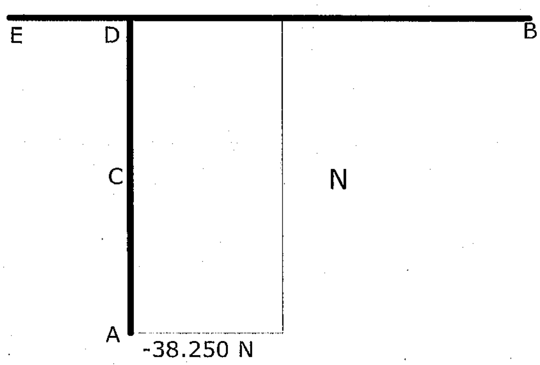
$$x = \frac{8.571{,}4 \pm \sqrt{8.571{,}4^2 + 4 \cdot 5.000 \cdot 20.000}}{2 \cdot 5000}; \quad x_1 = -1{,}32\,m, \; x_2 = 3{,}03\,m$$

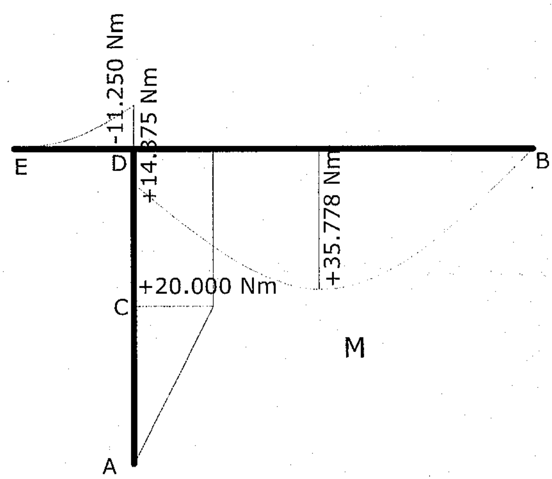
Ovviamente la radice negativa ha solo significato matematico.

# Esercizio n. 7




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A + 10.000 = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - 10.000 \cdot 6{,}50 + V_B = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow 10.000 \cdot 2 + 10.000 \cdot 6{,}50 \cdot 1{,}75 - V_B \cdot 5 = 0$$

Dalla prima equazionedi ricava:

$$H_A = -10.000 \text{ N}$$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{133.750}{5} = 26.750 \text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A = 65.000 - 26.750 = 38.250 \text{N}$$

Il fatto che $H_A$ sia negativa significa che il verso ipotizzato è errato e che la reazione è rivolta verso sinistra. Bisognerà tenerne debito conto nel calcolo delle sollecitazioni.

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$N_A = -V_A = -38.250\,N$$

$$N_{DA} = N_A$$

$$N_E = N_{DE} = N_{DB} == N_B 0$$

$$T_A = -H_A = 10.000\,N$$

$$T_{CA} = T_A$$

$$T_{CD} = T_{CA} - F = 10.000 - 10.000 = 0$$

$$T_{DC} = T_{CD}$$

$$T_E = 0$$

$$T_{DE} = -q \cdot 1{,}50 = -15.000\,N$$

$$T_{DB} = T_{DE} + V_A = -15.000 + 38.250 = 23.250\,N$$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{\text{iniziale}}}{q} = \frac{23.250}{10.000} = 2{,}32\,m$$

$$T_B = T_{DB} - q \cdot 5 = -V_B = 23.250 - 10.000 \cdot 5 = -26.750\,N$$

$$M_A = 0$$

$$M_C = -H_A \cdot 2 = 10.000 \cdot 2 = 20.000\,Nm$$

$$M_{DC} = -H_A \cdot 4 - F \cdot 2 = 10.000 \cdot 4 - 10.000 \cdot 2 = 20.000\,Nm$$

$$M_E = 0$$

$$M_{DE} = -10.000 \cdot 1{,}50 \cdot 0{,}75 = -11.250\,Nm$$

$$M_{DB} = M_{DC} + M_{DE} = 8.750\,Nm$$

$$M_{max} = -H_A \cdot 4 - F \cdot 2 + V_A \cdot x - \frac{q \cdot (x + 1{,}50)^2}{2} =$$

$$= 10.000 \cdot 4 - 10.000 \cdot 2 + 38.250 \cdot 2{,}32 - \frac{10.000 \cdot (2{,}32 + 1.50)^2}{2} = 35.778\,Nm$$

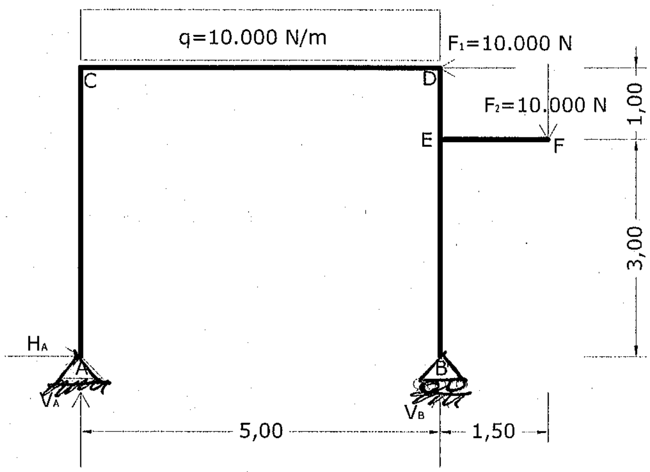
(guardando a sinistra della sezione)

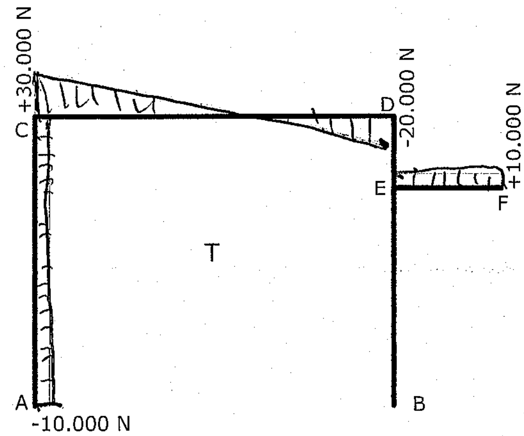
$$M_{max} = V_B \cdot (5 - x) - \frac{q \cdot (5 - x)^2}{2} = 26.750 \cdot (5 - 2{,}32) - \frac{10.000 \cdot (5 - 2{,}32)^2}{2} = 35.778\ Nm$$

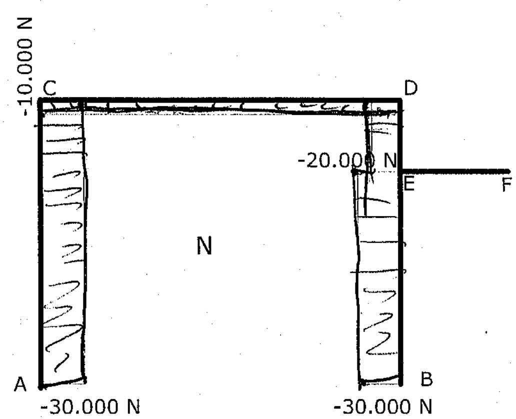
(guardando a destra della sezione)

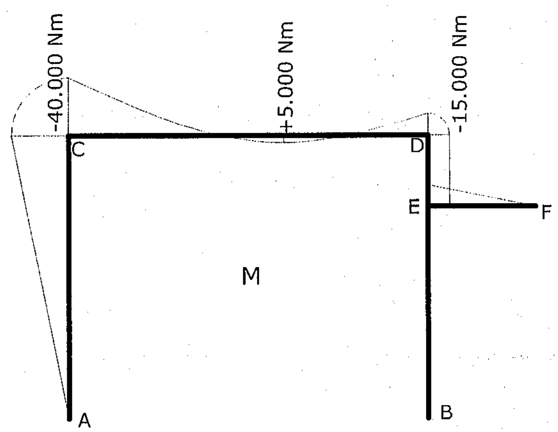
$$M_B = 0$$

# Esercizio n. 8




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A - F_1 = H_A - 10.000 = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - q \cdot 5 - F_2 + V_B = V_A - 10.000 \cdot 5 - 10.000 + V_B = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow q \cdot 5 \cdot 2{,}50 - F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 6{,}50 - V_B \cdot 5 =$$

$$= 10.000 \cdot 5 \cdot 2{,}50 - 10.000 \cdot 4 + 10.000 \cdot 6{,}50 - V_B \cdot 5 = 0$$

Dalla prima equazionedi ricava:

$$H_A = 10.000 \text{ N}$$

Dall'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$V_B = \frac{150.000}{5} = 30.000 \text{ N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A = 60.000 - 30.000 = 30.000 \text{ N}$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$N_A \quad V_A \quad 30.000\,\text{N}$

$N_{CA} = N_A = -$

$N_{CD} = -H_A = -10.000\ \text{N}$

$N_{DC} = N_{CD}$

$N_{DE} = V_A - q \cdot 5 = 30.000 - 10.000 \cdot 5 = -20.000\ \text{N}$ (guardando prima della sezione)

$N_{DE} = -V_B + F_2 = -30.000 + 10.000 = -20.000\,\text{N}$ (guardando dopo la sezione)

$N_{ED} = N_{DE}$

$N_{EB} = N_{ED} - F_2 = -20.000 - 10.000 = -30.000\,\text{N}$

$T_A = -H_A = -10.000\ \text{N}$

$T_{CA} = T_A$

$T_{CD} = V_A = 30.000\ \text{N}$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{\text{iniziale}}}{q} = \frac{30.000}{10.000} = 3{,}00\ \text{m}$$

$T_{DC} = T_{CD} - q \cdot 5 = 30.000 - 10.000 \cdot 5 = -20.000\ \text{N}$

$T_{DE} = H_A - F_1 = 10.000 - 10.000 = 0$

$T_{DB} = T_{DE} = T_B$

$T_{DF} = V_A - q \cdot 5 + V_B = 30.000 - 50.000 + 30.000 = 10.000\ \text{N}$

$T_F = T_{DF}$

$M_A = 0$

$M_C = -H_A \cdot 4 = 10.000 \cdot 4 = -40.000\,\text{Nm}$

$$M_{max} = -H_A \cdot 4 + V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = -10.000 \cdot 4 + 30.000 \cdot 3{,}00 - \frac{10.000 \cdot 3^2}{2} = 5.000\,\text{Nm}$$

$$M_D = -H_A \cdot 4 + V_A \cdot 5 - \frac{q \cdot 5^2}{2} = -10.000 \cdot 4 + 30.000 \cdot 5{,}00 - \frac{10.000 \cdot 5^2}{2} = -15.000\,\text{Nm}$$

(guardando a sinistra della sezione)

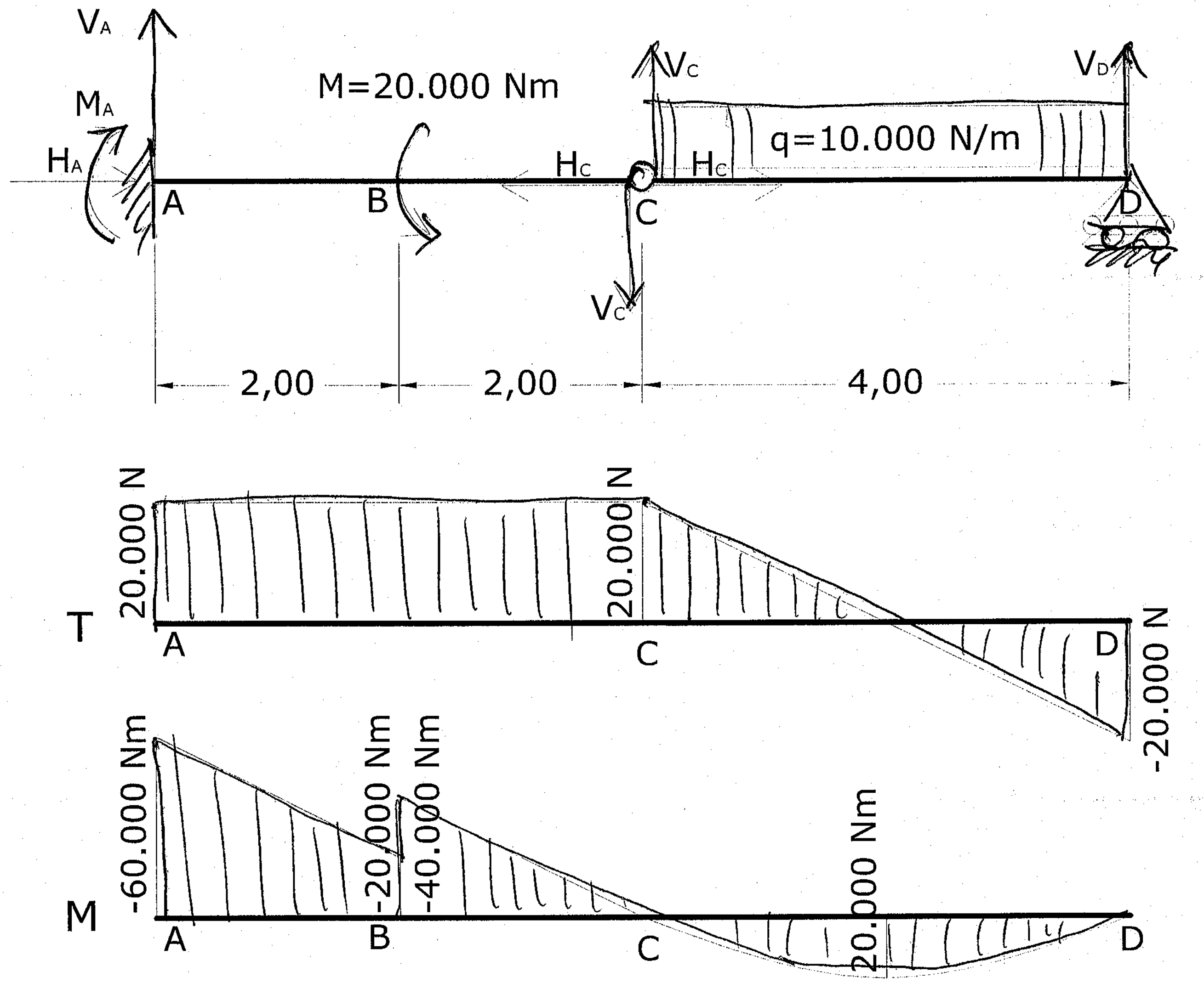
$M_D = -F_2 \cdot 1{,}50 = -10.000 \cdot 1{,}50 = -15.000\ \text{Nm}$

(guardando a destra della sezione)

$M_E = -F_2 \cdot 1{,}50 = -10.000 \cdot 1{,}50 = -15.000\ \text{Nm}$

$M_F = M_B = 0$

Esercizio n. 9




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\sum V = 0 \rightarrow V_A - q \cdot 4 + V_D = V_A - 10.000 \cdot 4 + V_D = 0$

$\sum M^A = 0 \rightarrow M_A - M + q \cdot 4 \cdot 6 - V_D \cdot 8 = M_A - 20.000 + 10.000 \cdot 4 \cdot 6 - V_D \cdot 8 = 0$

Le reazioni incognite sono $H_A$, $V_A$, $M_A$, $V_D$, ma le equazioni a disposizione sono solo 3.

Considerando che la prima equazione si risolve immediatamente dando $H_A=0$, le incognite scendono a tre ma le equazioni a disposizione sono ora solo due.

Si deve in ogni caso scrivere una equazione ausiliaria, operando l'equilibrio alla rotazione attorno al punto C del tratto CD:

$\sum M^C = 0 \rightarrow q \cdot 4 \cdot 2 - V_D \cdot 4 = 10.000 \cdot 4 \cdot 2 - V_D \cdot 4 = 0$

Da questa si ottiene:

$$V_D = \frac{80.000}{4} = 20.000\,\mathrm{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$V_A = 40.000 - 20.000 = 20.000\,\mathrm{N}$

E dalla terza, infine:

$M_A = 20.000 - 10.000 \cdot 4 \cdot 6 + 20.000 \cdot 8 = -60.000\,\mathrm{Nm}$

Dall'equilibrio del tratto AC si ricavano pure:

$$V_C = V_A = 20.000\,\text{N}$$

$$H_C = H_A = 0$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$T_A = V_A = 20.000\,\text{N}$$

$$T_C = T_A = 20.000\,\text{N}$$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{\text{iniziale}}}{q} = \frac{20.000}{10.000} = 2{,}00\,\text{m}$$

$$T_D = T_C - q \cdot 4 = 20.000 - 10.000 \cdot 4 = -20.000\,\text{N}$$

$$M_A = -60.000\,\text{Nm}$$

$$M_B^{'} = M_A + V_A \cdot 2 = -60.000 + 20.000 \cdot 2 = -20.000\,\text{Nm}$$

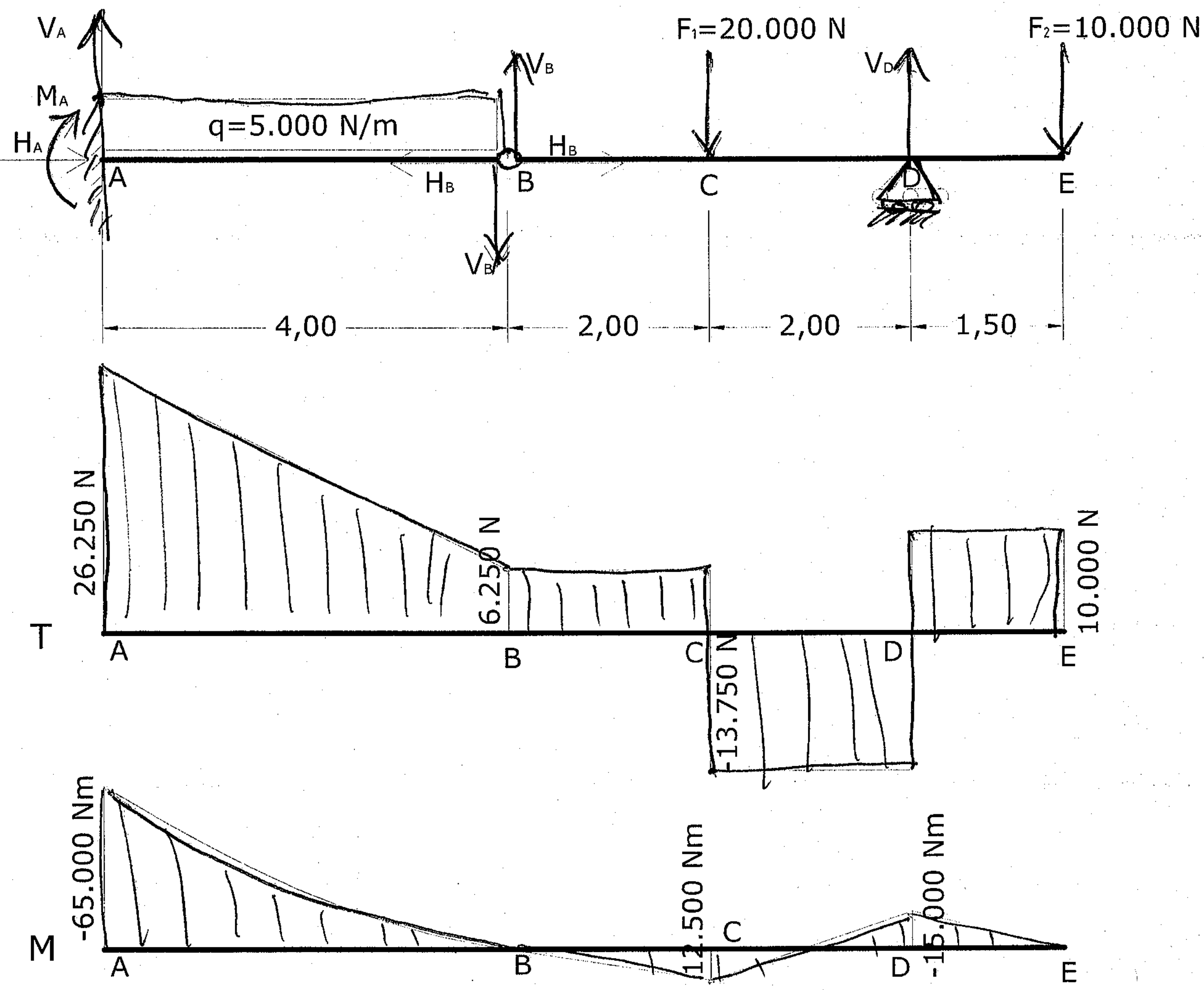
$$M_B^{''} = M_B^{'} - M = -20.000 - 20.000 = -40.000\,\text{Nm}$$

$$M_C = 0$$

$$M_{\max} = V_C \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 20.000 \cdot 2 - \frac{10.000 \cdot 2^2}{2} = 20.000\,\text{Nm}$$

$$M_D = 0$$

## Esercizio n. 10




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - q \cdot 4 - F_1 + V_D - F_2 = V_A - 5.000 \cdot 4 - 20.000 + V_D - 10.000 = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow M_A + q \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 6 - V_D \cdot 8 + F_2 \cdot 9{,}50 =$$

$$= M_A + 5.000 \cdot 4 \cdot 2 + 20.000 \cdot 6 - V_D \cdot 8 + 10.000 \cdot 9{,}50 = 0$$

Le reazioni incognite sono $H_A$, $V_A$, $M_A$, $V_D$, ma le equazioni a disposizione sono solo 3.
Considerando che la prima equazione si risolve immediatamente dando $H_A=0$, le incognite scendono a tre ma le equazioni a disposizione sono ora solo due.
Si deve in ogni caso scrivere una equazione ausiliaria, operando l'equilibrio alla rotazione attorno al punto C del tratto CE:

$$\sum M^C = 0 \rightarrow F_1 \cdot 2 - V_D \cdot 4 + F_2 \cdot 5{,}50 = 20.000 \cdot 2 - V_D \cdot 4 + 10.000 \cdot 5{,}50 = 0$$

Da questa si ottiene:

$$V_D = \frac{95.000}{4} = 23.750\,\text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A = 30.000 - 23.750 = 6.250\,\text{N}$$

E dalla terza, infine:

14

$M_A = -5.000 \cdot 4 \cdot 2 - 120.000 + 23.750 \cdot 8 - 10.000 \cdot 9{,}50 = -65.000\,\mathrm{Nm}$

Dall'equilibrio del tratto AB si ricavano pure:

$V_B = V_A - 5.000 \cdot 4 = 6.250\,\mathrm{N}$

$H_B = H_A = 0$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$T_A \quad V_A \quad 26.250\,\mathrm{N}$

$T_B \equiv T_A \overset{=}{-} q \cdot 4 = 26.250 - 5.000 \cdot 4 = 6.250\,\mathrm{N}$

$T_C' = T_B = 6.250\,\mathrm{N}$

$T_C'' = T_C' - F_1 = 6.250 - 20.000 = -13.750\,\mathrm{N}$

$T_D' = T_C'' = -13.750\,\mathrm{N}$

$T_D'' = T_D' + V_D = -13.750 + 23.750 = 10.000\,\mathrm{N}$

$T_E = T_D'' = 10.000\,\mathrm{N}$

$M_A = -65.000\,\mathrm{Nm}$

$M_B = M_A + V_A \cdot 4 - \dfrac{q \cdot 4^2}{2} = -65.000 + 26.250 \cdot 4 - \dfrac{5.000 \cdot 4^2}{2} = 0$ (nella cerniera il M è nullo)

$M_B'' = M_B' - M = -20.000 - 20.000 = -40.000\,\mathrm{Nm}$

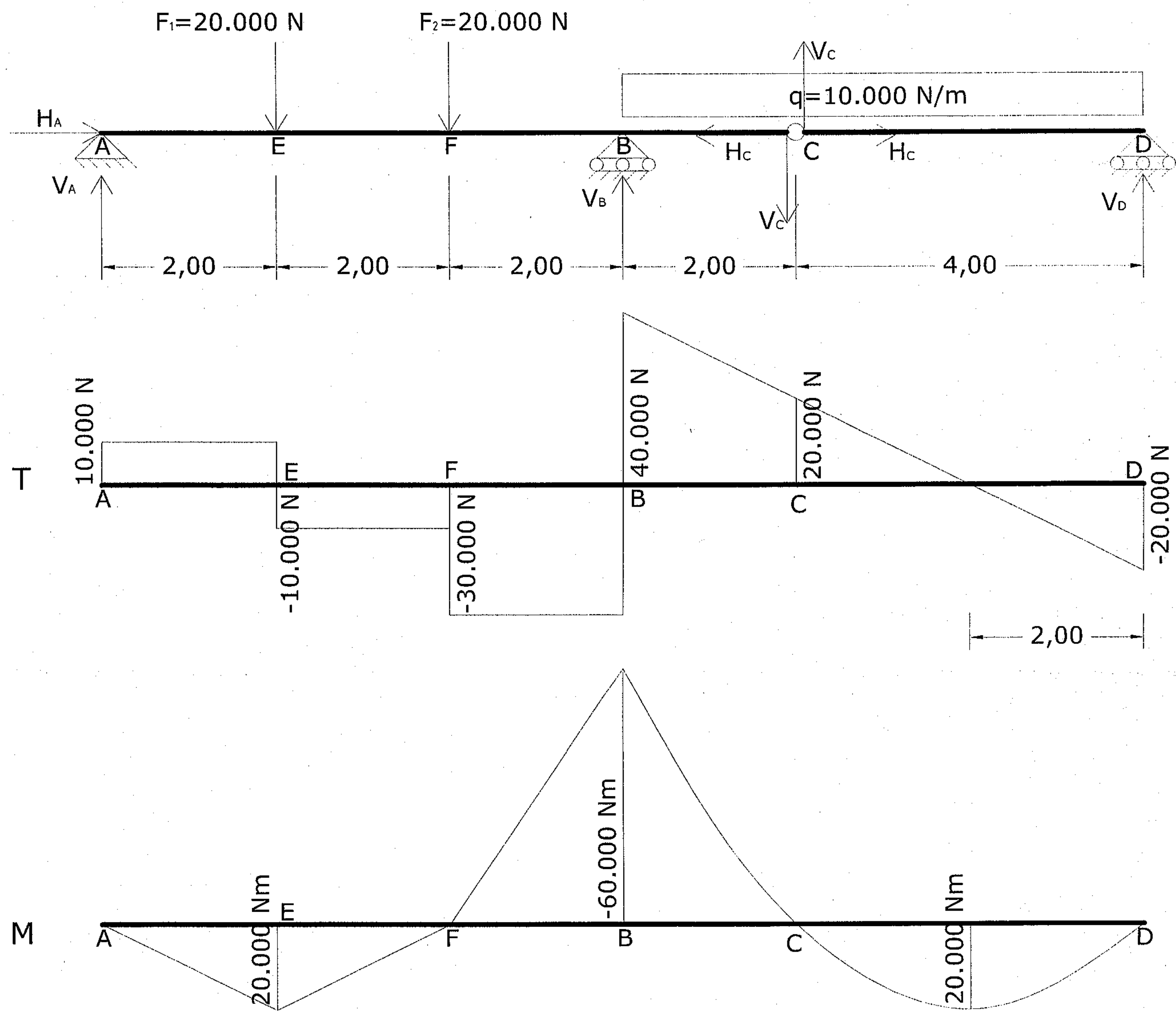
$M_C = V_B \cdot 2 = 6.250 \cdot 2 = 12.500\,\mathrm{Nm}$

$M_D = V_B \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = 6.250 \cdot 4 - 20.000 \cdot 2 = -15.000\,\mathrm{Nm}$

$M_D = -F_2 \cdot 1{,}50 = -10.000 \cdot 1{,}50 = -15.000\,\mathrm{Nm}$

$M_E = 0$

Esercizio n. 11




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - F_1 - F_2 + V_B - q \cdot (2+4) + V_D = V_A - 20.000 - 20.000 + V_B - 10.000 \cdot 6 + V_D = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 4 - V_B \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 9 - V_D \cdot 12 =$$

$$= 20.000 \cdot 2 + 20.000 \cdot 4 - V_B \cdot 6 + 10.000 \cdot 6 \cdot 9 - V_D \cdot 12 = 0$$

Le reazioni incognite sono $H_A$, $V_A$, $V_B$, $V_D$, ma le equazioni a disposizione sono solo 3.
Considerando che la prima equazione si risolve immediatamente dando $H_A$=0, le incognite scendono a tre ma le equazioni a disposizione sono ora solo due.
Si deve in ogni caso scrivere una equazione ausiliaria, operando l'equilibrio alla rotazione attorno al punto C del tratto CD:

$$\sum M^C = 0 \rightarrow q \cdot 4 \cdot 2 - V_D \cdot 4 = 10.000 \cdot 4 \cdot 2 - V_D \cdot 4 = 0$$

Da questa si ottiene:

$$V_D = \frac{80.000}{4} = 20.000\,\mathrm{N}$$

Sostituendo tale valore nella terza equazione si ha:

$$V_B = \frac{20.000 \cdot 2 + 20.000 \cdot 4 + 10.000 \cdot 6 \cdot 9 - 20.000 \cdot 12}{6} = 70.000\,\text{N}$$

E dalla seconda, infine:

$$V_A = 20.000 + 20.000 - 70.000 + 10.000 \cdot 6 - 20.000 = 10.000\,\text{N}$$

Dall'equilibrio del tratto AC si ricavano pure:

$$V_C = V_A - 10.000 - 10.000 + V_B - 10.000 \cdot 2 = 10.000 - 20.000 - 20.000 + 70.000 - 20.000 = 20.000\,\text{N}$$

$$H_C = H_A = 0$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$T_A = V_A = 10.000\,\text{N}$$

$$T_E^{'} = T_A = 10.000\,\text{N}$$

$$T_E^{''} = T_E^{'} - F_1 = 10.000 - 20.000 = -10.000\,\text{N}$$

$$T_F^{'} = T_E^{''} = -10.000\,\text{N}$$

$$T_F^{''} = T_F^{'} - 20.000 = -30.000\,\text{N}$$

$$T_B^{'} = T_F^{''} = -30.000\,\text{N}$$

$$T_B^{''} = T_B^{'} + V_B = -30.000 + 70.000 = 40.000\,\text{N}$$

$$T_C = T_B^{''} - q \cdot 2 = 40.000 - 10.000 \cdot 2 = 20.000\,\text{N}$$

$$T(x) = 0 \;\text{ per }\; x = \frac{T_{iniz}}{q} = \frac{20.000}{10.000} = 2\,\text{m}$$

$$T_D = T_C + q \cdot 4 = 20.000 - 10.000 \cdot 4 = -20.000\,\text{N}$$

$$M_A = 0$$

$$M_E = V_A \cdot 2 = 10.000 \cdot 2 = 20.000\,\text{Nm}$$

$$M_F = V_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = 10.000 \cdot 4 - 20.000 \cdot 2 = 0$$

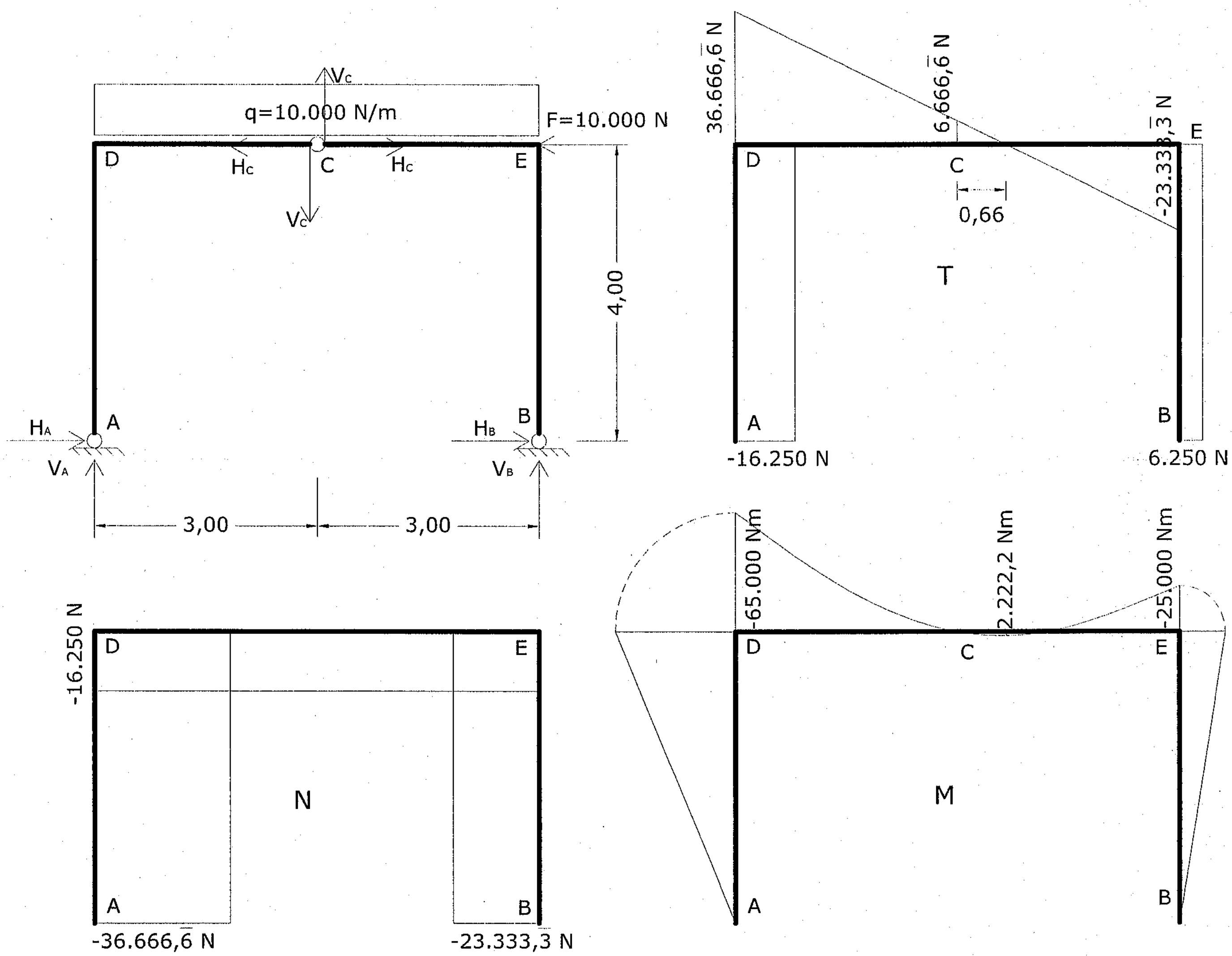
$$M_B = V_A \cdot 6 - F_1 \cdot 4 - F_2 \cdot 2 = 10.000 \cdot 6 - 20.000 \cdot 4 - 20.000 \cdot 2 = -60.000\,\text{Nm}$$

$$M_C = V_A \cdot 8 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 4 + V_B \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} =$$

$$= 10.000 \cdot 8 - 20.000 \cdot 6 - 20.000 \cdot 4 + 70.000 \cdot 2 - \frac{10.000 \cdot 2^2}{2} = 0 \quad \text{(nella cerniera il M è nullo)}$$

$$M_{max} = V_C \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 20.000 \cdot 2 - \frac{10.000 \cdot 2^2}{2} = 20.000\,\text{Nm}$$

$$M_D = 0$$




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A + H_B - F = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - q \cdot 6 + V_B = V_A - 10.000 \cdot 6 + V_B = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow q \cdot 6 \cdot 3 - F \cdot 4 - V_B \cdot 6 = 10.000 \cdot 6 \cdot 3 - 10.000 \cdot 4 - V_B \cdot 6 = 0$$

Le reazioni incognite sono $H_A$, $H_B$, $V_A$, $V_B$, ma le equazioni a disposizione sono solo 3. Si dovrà quindi scrivere una equazione ausiliaria.

Dalla terza equazione si ha:

$$V_B = \frac{180.000 - 40.000}{6} = 23.333,\bar{3}\,\mathrm{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione ricaviamo:

$$V_A = 60.000 - 23.333,\bar{3} = 36.666,\bar{6}\,\mathrm{N}$$

Rimane ora la sola prima equazione che presenta due incognite; si deve in ogni caso scrivere l'equazione ausiliaria, operando l'equilibrio alla rotazione attorno al punto C del tratto CEB:

$$\sum M^C = 0 \rightarrow q \cdot 3 \cdot 1{,}50 - V_B \cdot 3 - H_B \cdot 4 = 10.000 \cdot 3 \cdot 1{,}50 - 23.333,\bar{3} \cdot 3 - H_B \cdot 4 = 0$$

$$H_B = \frac{45.000 - 70.000}{4} = -6.250\,\mathrm{N}$$

Al solito, quando il segno di una reazione è negativo significa che il suo verso è contrario a quello ipotizzato scrivendo le equazioni. Sostituendo ora nella prima equazione il valore di $H_B$:

$H_A = 10.000 + 6.250 = 16.250\,N$

Dall'equilibrio del tratto CEB si ricavano pure:

$V_C = -V_B + q \cdot 3 = -23.333,\bar{3} + 10.000 \cdot 3 = 6.666,\bar{6}\,N$

$H_C = -H_B + F = 6.250 + 10.000 = 16.250\,N$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$N_A = -V_A = -36.666,\bar{6}\,N$

$N_{DA} = N_A = -36.666,\bar{6}\,N$

$N_{DC} = -H_A = -16.250\,N$

$N_C = N_{DC} = N_{EC} = -16.250\,N$

$N_{EB} = V_A - q \cdot 6 = 36.666,\bar{6} - 10.000 \cdot 6 = -23.333,\bar{3}\,N$

$N_B = N_{EB} = -23.333,\bar{3}\,N$

$T_A = -H_A = -16.250\,N$

$T_{DA} = T_A = -16.250\,N$

$T_{DC} = V_A = 36.666,\bar{6}\,N$

$T_C = T_{DC} - q \cdot 3 = 6.666,\bar{6}\,N$

$$T(x) = 0 \text{ per } x = \frac{T_{iniz}}{q} = \frac{6.666,\bar{6}}{10.000} = 0,\bar{6}\,m$$

$T_{EC} = T_C - q \cdot 3 = 6.666,\bar{6} - 10.000 \cdot 3 = -23.333,\bar{3}\,N$

$T_{EB} = H_A - F = 16.250 - 10.000 = 6.250\,N$

$T_B = T_{EB} = 6.250\,N$

$M_A = 0$

$M_D = -H_A \cdot 4 = -16.250 \cdot 4 = -65.000\,Nm$

$$M_C = -H_A \cdot 4 + V_A \cdot 3 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = -16.250 \cdot 4 + 36.666,\bar{6} \cdot 3 - \frac{10.000 \cdot 3^2}{2} = 0 \text{ (nella cerniera il M è nullo)}$$

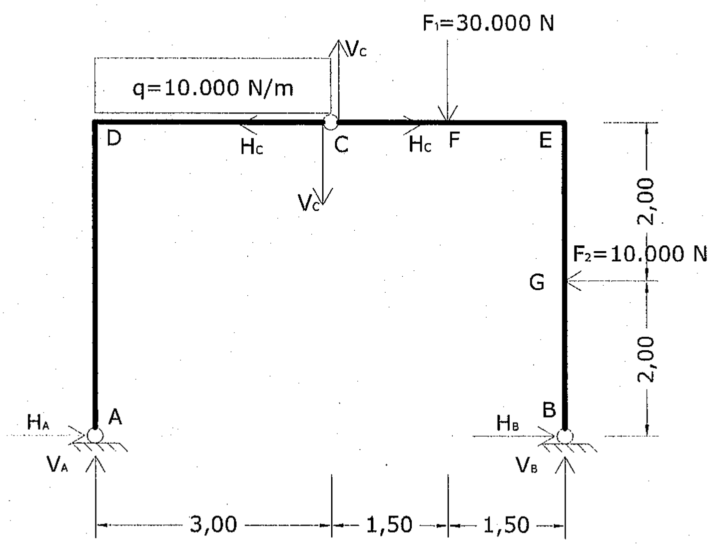
$$M_{max} = V_C \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 6.666,\bar{6} \cdot 0,\bar{6} - \frac{10.000 \cdot 0,\bar{6}^2}{2} = 2.222,\bar{2}\,Nm$$

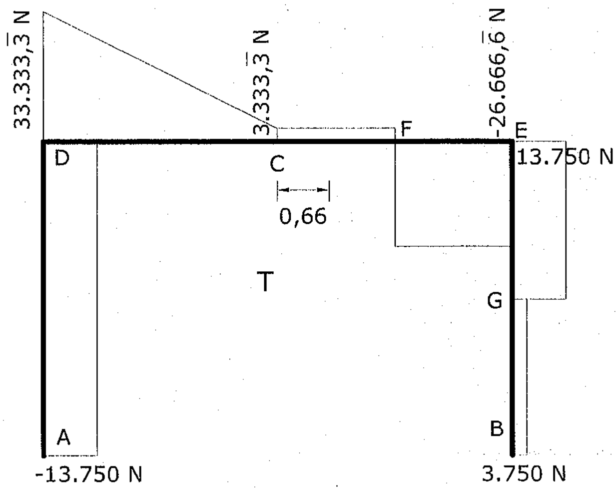
$$M_E = V_C \cdot 3 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = 6.666,\bar{6} \cdot 3 - \frac{10.000 \cdot 3^2}{2} = -25.000\,Nm$$

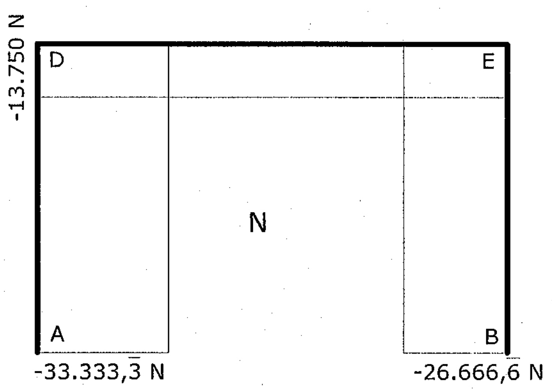
per verifica calcoliamo il momento guardando dopo la sezione E

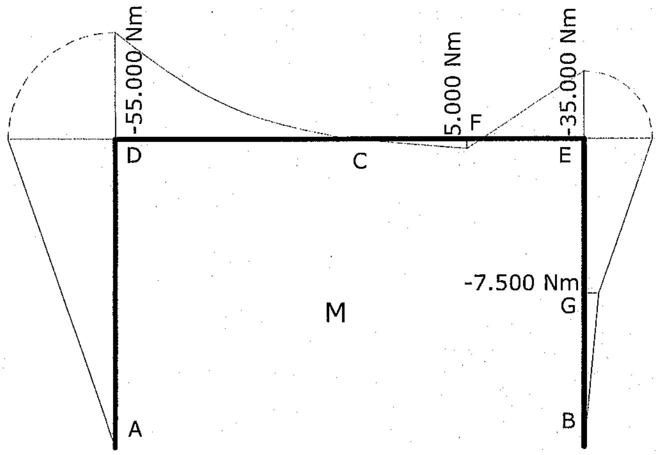
$M_E = H_B \cdot 4 = -6.250 \cdot 4 = -25.000\,Nm$

$M_B = 0$




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A + H_B - F_2 = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - q \cdot 3 - F_1 + V_B = V_A - 10.000 \cdot 3 - 30.000 + V_B = 0$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow q \cdot 3 \cdot 1{,}50 + F_1 \cdot 4{,}50 - F_2 \cdot 2 - V_B \cdot 6 =$$

$$= 10.000 \cdot 3 \cdot 1{,}50 + 30.000 \cdot 4{,}50 - 10.000 \cdot 2 - V_B \cdot 6 = 0$$

Le reazioni incognite sono $H_A$, $H_B$, $V_A$, $V_B$, ma le equazioni a disposizione sono solo 3. Si dovrà quindi scrivere una equazione ausiliaria.

Dalla terza equazione si ha:

$$V_B = \frac{45.000 + 135.000 - 20.000}{6} = 26.666{,}\overline{6}\,\text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione ricaviamo:

$$V_A = 30.000 + 30.000 - 26.666{,}\overline{6} = 33.333{,}\overline{3}\,\text{N}$$

Rimane ora la sola prima equazione che presenta due incognite; si deve in ogni caso scrivere l'equazione ausiliaria, operando l'equilibrio alla rotazione attorno al punto C del tratto CEB:

$$\sum M^C = 0 \rightarrow F_1 \cdot 1{,}50 + F_2 \cdot 2 - V_B \cdot 3 - H_B \cdot 4 = 30.000 \cdot 1{,}50 + 10.000 \cdot 2 - 26.666{,}\overline{6} \cdot 3 - H_B \cdot 4 = 0$$

$$H_B = \frac{45.000 + 20.000 - 80.000}{4} = -3.750\,\text{N}$$

Al solito, quando il segno di una reazione è negativo significa che il suo verso è contrario a quello ipotizzato quando si sono scritte le equazioni. Sostituendo ora nella prima equazione il valore di $H_B$:

$$H_A = 10.000 + 3.750 = 13.750\,\text{N}$$

20

Dall'equilibrio del tratto CEB si ricavano pure:

$$V_C = -V_B + q \cdot 3 = -26.666,\bar{6} + 10.000 \cdot 3 = 3.333,\bar{3}\,N$$
$$H_C = -H_B + F_2 = 6.250 + 10.000 = 13.750\,N$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

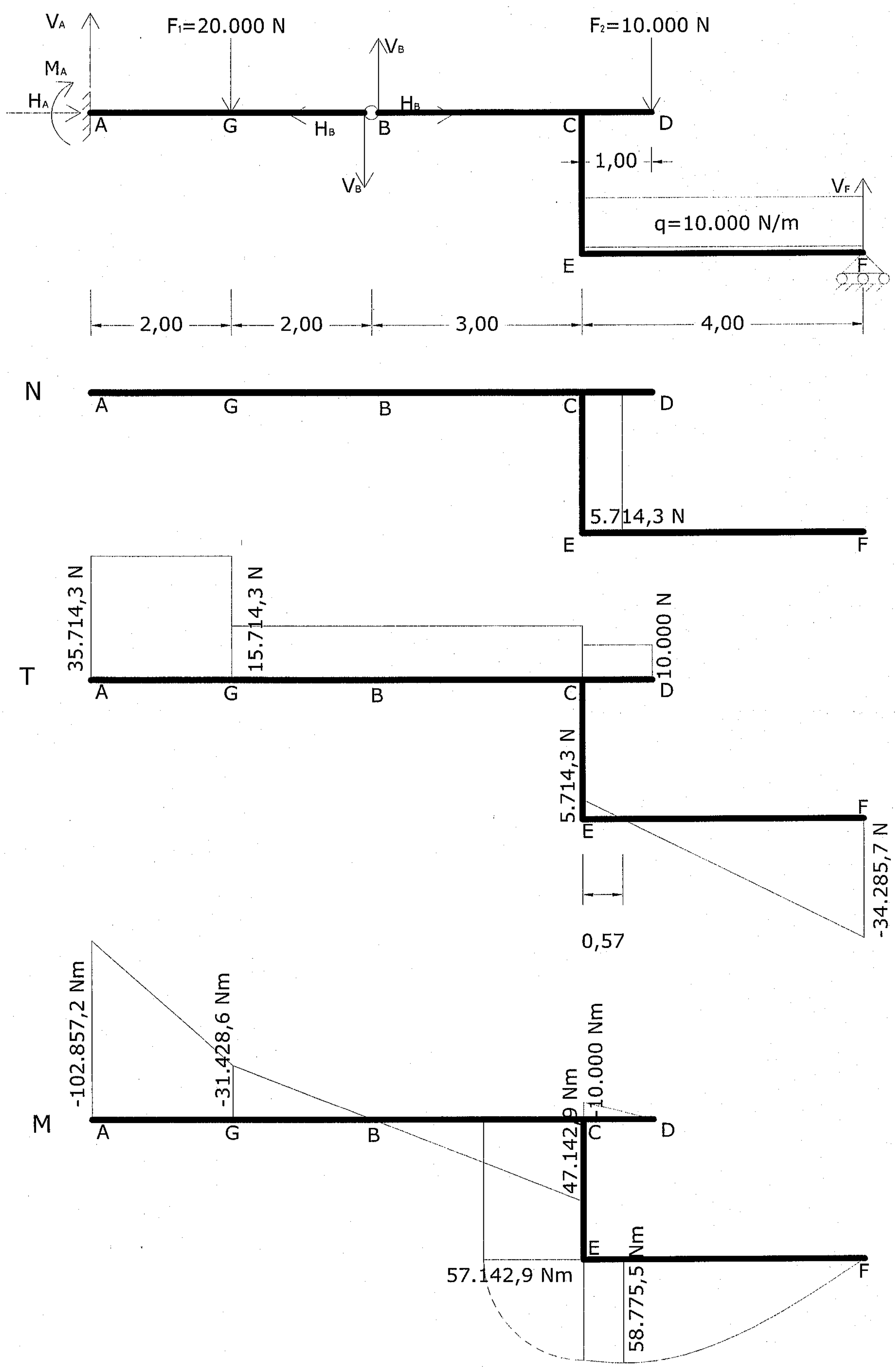
$$N_A = -V_A = -33.333,\bar{3}\,N$$
$$N_{DA} = N_A = -33.333,\bar{3}\,N$$
$$N_{DC} = -H_A = -13.750\,N$$
$$N_C = N_{DC} = N_{EC} = -13.750\,N$$
$$N_{EB} = V_A - q \cdot 3 - F_1 = 33.333,\bar{3} - 10.000 \cdot 3 - 30.000 = -26.666,\bar{6}\,N$$
$$N_B = N_{EB} = -26.666,\bar{6}\,N$$

$$T_A = -H_A = -13.750\,N$$
$$T_{DA} = T_A = -13.750\,N$$
$$T_{DC} = V_A = 33.333,\bar{3}\,N$$
$$T_C = T_{DC} - q \cdot 3 = 3.333,\bar{3}\,N$$
$$T_F^{'} = T_C = 3.333,\bar{3}\,N$$
$$T_F^{''} = T_F^{'} - F_1 = 3.333,\bar{3} - 30.000 = -26.666,\bar{6}\,N$$
$$T_{EC} = T_F^{''} = -26.666,\bar{6}\,N$$
$$T_{EB} = H_A = 13.750\,N$$
$$T_G^{'} = T_{EB} = 13.750\,N$$
$$T_G^{''} = T_G^{'} - F_2 = 13.750 - 10.000 = 3750\,N$$
$$T_B = T_G^{''} = 3.750\,N$$

$$M_A = 0$$
$$M_D = -H_A \cdot 4 = -13.750 \cdot 4 = -55.000\,Nm$$
$$M_C = -H_A \cdot 4 + V_A \cdot 3 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = -13.750 \cdot 4 + 33.333,\bar{3} \cdot 3 - \frac{10.000 \cdot 3^2}{2} = 0 \quad \text{(nella cerniera il M è nullo)}$$
$$M_F = V_C \cdot 1{,}50 = 3.333,\bar{3} \cdot 1{,}50 = 5.000\,Nm$$
$$M_E = V_C \cdot 3 - F_1 \cdot 1{,}50 = 3.333,\bar{3} \cdot 3 - 30.000 \cdot 1{,}50 = -35.000\,Nm$$

per verifica calcoliamo il momento guardando dopo la sezione E

$$M_E = H_B \cdot 4 - F_2 \cdot 2 = -3.750 \cdot 4 - 10.000 \cdot 2 = -35.000\,Nm$$
$$M_G = H_B \cdot 2 = -3.750 \cdot 2 = -7.500\,Nm$$
$$M_B = 0$$




Scriviamo le equazioni di equilibrio della statica:



22

$$H=0 \rightarrow H_A=0$$

$$\sum V=0 \rightarrow V_A-F_1-F_2-q\cdot 4+V_F=V_A-20.000-10.000-10.000\cdot 4+V_F=0$$

$$\sum M^A=0 \rightarrow M_A+F_1\cdot 2+F_2\cdot 8+q\cdot 4\cdot 9-V_F\cdot 11=$$

$$=M_A+20.000\cdot 2+10.000\cdot 8+10.000\cdot 4\cdot 9-V_F\cdot 11=0$$

Le reazioni incognite sono $M_A$, $H_A$, $V_A$, $V_F$, ma le equazioni a disposizione sono solo 3.
Considerando che la prima equazione si risolve immediatamente dando $H_A$=0, le incognite scendono a tre ma le equazioni a disposizione sono ora solo due.
Si deve in ogni caso scrivere una equazione ausiliaria, operando l'equilibrio alla rotazione attorno al punto B del tratto BF:

$$\sum M^B=0 \rightarrow 10.000\cdot 4+q\cdot 4\cdot 5-V_F\cdot 7=10.000\cdot 4+10.000\cdot 4\cdot 5-V_F\cdot 7=0$$

Da questa si ottiene:

$$V_F=\frac{240.000}{7}=34.285,7\ \text{N}$$

Sostituendo tale valore nella seconda equazione si ha:

$$V_A=20.000+10.000+10.000\cdot 4-34.285,7=35.714,3\ \text{N}$$

E dalla terza, infine:

$$M_A=-40.000-80.000-360.000+34.285,7\cdot 11=102.857,3\,\text{Nm}$$

Dall'equilibrio del tratto AB si ricavano pure:

$$V_B=V_A-20.000=35.714,3-20.000=15.714,3\,\text{N}$$

$$H_B=H_A=0$$

§

Per le caratteristiche di sollecitazione:

$$N_A=H_A=0$$

$$N_B=N_{CB}=N_{CD}=N_{EF}=N_F=0$$

$$N_{CE}=V_A-20.000-10.000=5.714,3\,\text{N}$$

$$N_{EC}=N_{CE}$$

$$T_A=V_A=35.714,3\,\text{N}$$

$$T_G'=T_A=35.714,3\,\text{N}$$

$$T_G''=T_G'-F_1=35.714,3-20.000=15.714,3\,\text{N}$$

$$T_B=T_{CB}=T_G''=15.714,3\,\text{N}$$

$$T_{CD}=F_2=10.000\,\text{N}$$

guardando a sinistra si avrebbe ugualmente

$$T_{CD}=V_A-F_1-q\cdot 4+V_F=35.714,3-20.000-10.000\cdot 4+34.285,7=10.000\,\text{N}$$

$$T_{CE}=H_A=0$$

$$T_{EC}=T_{CE}=0$$

$$T_{EF}=V_A-F_1-F_2=35.714,3-20.000-10.000=5.714,3\,\text{N}$$

$$T(x)=0 \text{ per } x=\frac{T_{iniz}}{q}=\frac{5.714,3}{10.000}=0,57\,\text{m}$$

$$T_F=-V_F=-34.285,7\,\text{N}$$

23

$M_A = -102.857,2\,\text{Nm}$

$M_G = M_A + V_A \cdot 2 = -102.857,2 + 35.714,3 \cdot 2 = -31.428,6\,\text{Nm}$

$M_B = M_A + V_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = -102.857,2 + 35.714,3 \cdot 4 - 20.000 \cdot 2 = 0$ (nella cerniera il M è nullo)

$M_{CB} = V_B \cdot 3 = 15.714,3 \cdot 3 = 47.142,9\,\text{Nm}$

$M_{CD} = -F_2 \cdot 1 = -10.000 \cdot 1 = -10.000\,\text{Nm}$

$M_{CE} = M_{CB} - M_{CD} = 47.142,9 + 10.000 = 57.142,9\,\text{Nm}$

$M_{EC} = M_{CE} = 57.142,9\,\text{Nm}$

$$M_{max} = V_B \cdot (3+x) + F_2 \cdot (1-x) - \frac{q \cdot x^2}{2} =$$

$$= 15.714,3 \cdot (3+0,57) + 10.000 \cdot (1-0,57) - \frac{10.000 \cdot 0,57^2}{2} = 58.775,5\,\text{Nm}$$

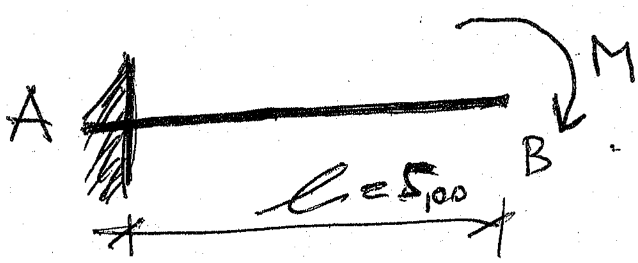
sarebbe stato più semplice calcolare il valore guardando a destra

$$M_{max} = V_F \cdot (4-x) - \frac{q \cdot (4-x)^2}{2} = 34.285,7 \cdot (4-0,57) - \frac{10.000 \cdot (4-0,57)^2}{2} = 58.775,5\,\text{Nm}$$

$M_F = 0$

COMPITO DI COSTRUZIONI 09/10/2019

(1)




$M = 20\,kN \cdot m$

$\alpha_B = ?$

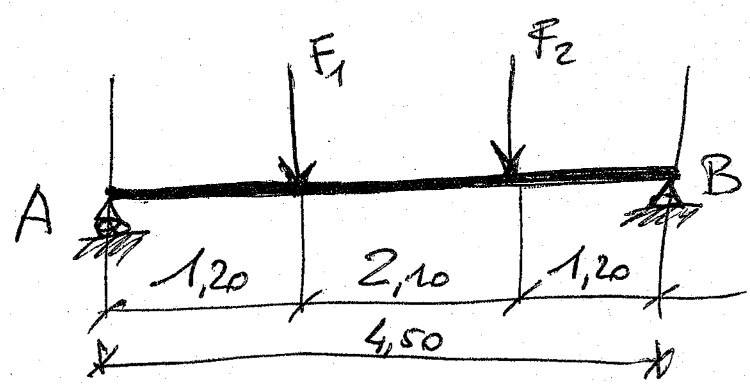
$f_{max} = ?$

$R_A = ?$

$M_A = ?$

DISEGNARE DIAGRAMMI T/M TRAVE REALE –

(2)




$R_A = ?$

$R_B = ?$

$\alpha_A = ?$

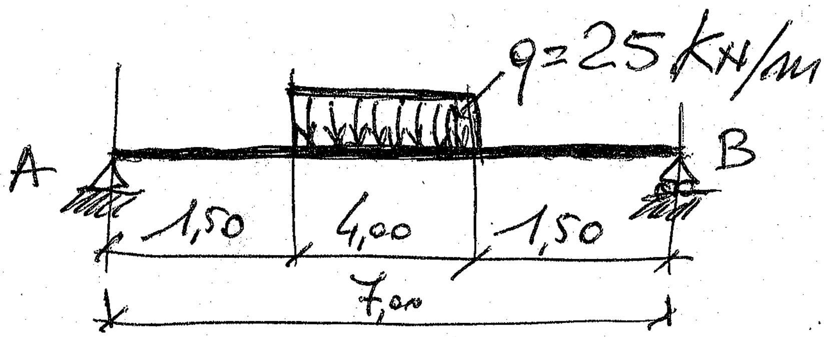
$\alpha_B = ?$

$F_1 = F_2 = 18\,KN$

$f_{max} = ?$

DISEGNARE DIAGRAMMI T/M DELLA TRAVE REALE

(3)




$q = 25\,kN/m$

$\alpha_A = ?$

$\alpha_B = ?$

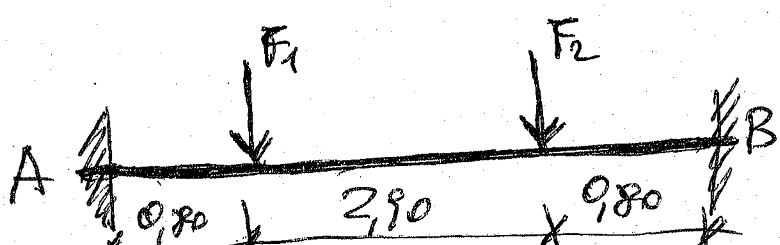
$f_{max} = ?$

$R_A = ?$

$R_B = ?$

DIAGRAMMI T/M DELLA TRAVE REALE –

(4)




$F_1 = F_2 = 30\,KN$

$f_{max} = ?$

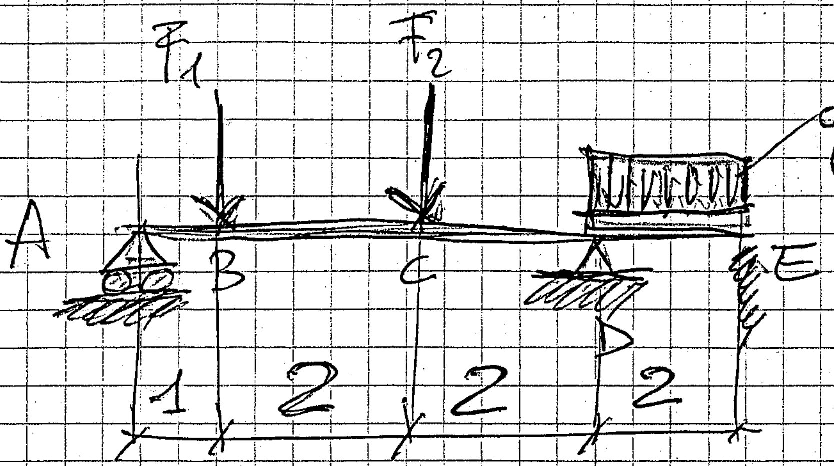
$R_A = ?$

$R_B = ?$

DIAGRAMMI T/M DELLA TRAVE REALE –

3°B COMPITO COSTRUZIONI 18/3/2017

## 1




q = 10 kN/m

$F_1$ = 6 kN

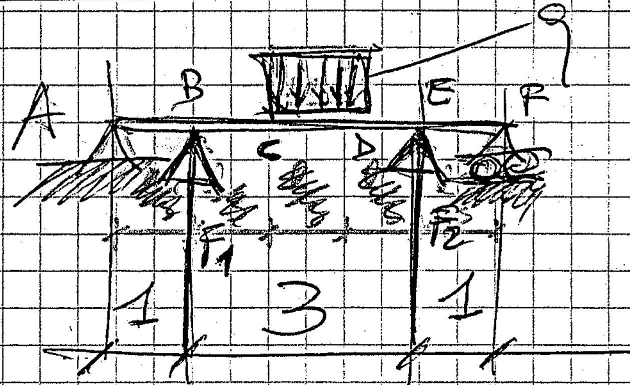
$F_2$ = 8 kN

RA = ?

RB = ?

DIAGRAMMI (T, M)

## 2




q = 12 kN/m

$F_1$ = 4 kN

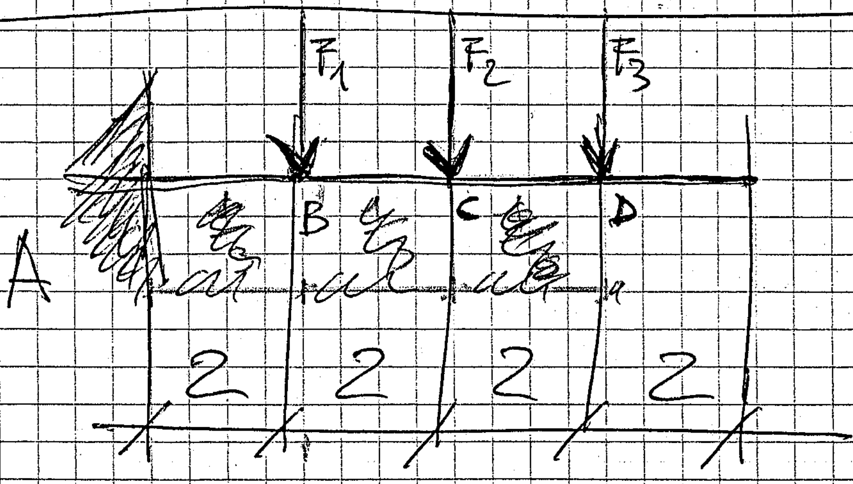
$F_2$ = 4 kN

RA ?

RB ?

DIAGRAMMI ?

## 3




$F_1$ = 4 kN

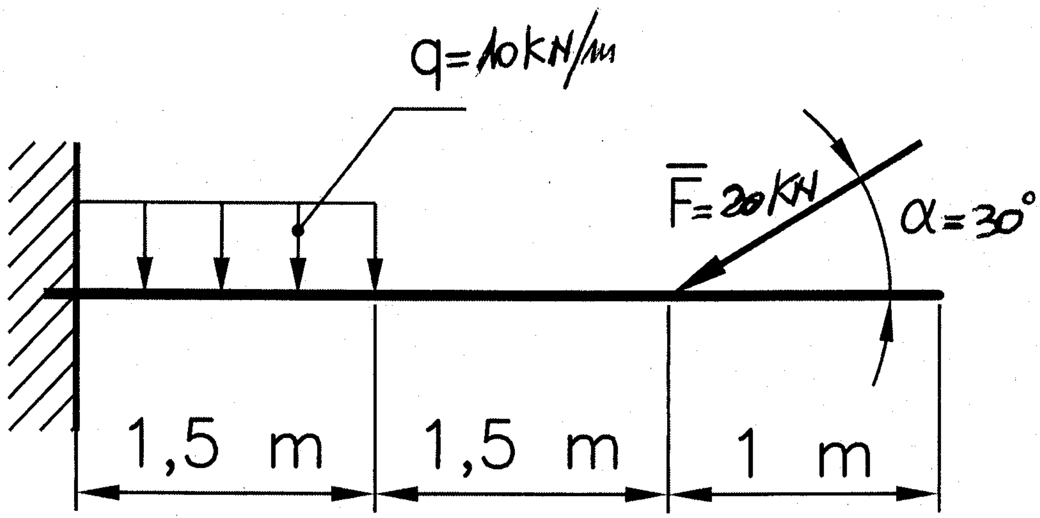
$F_2$ = 3 kN

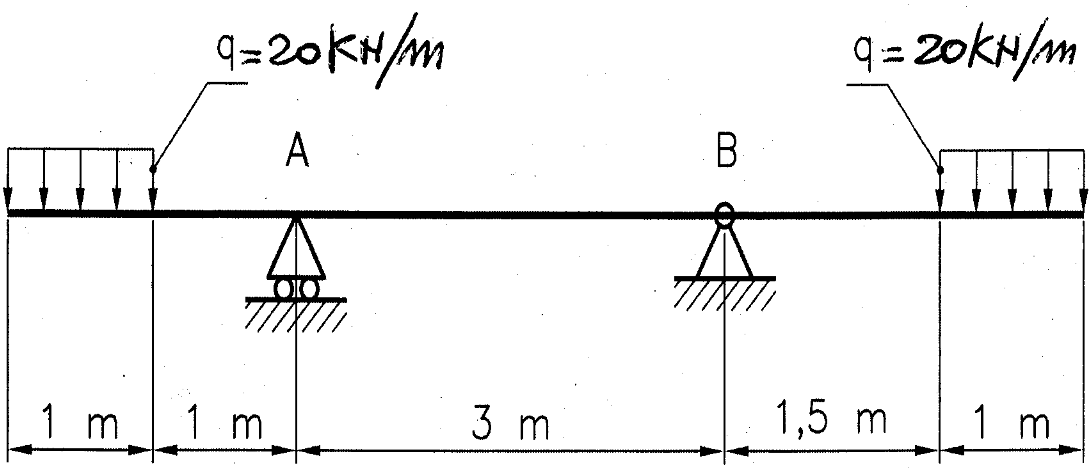
$F_3$ = 8 kN

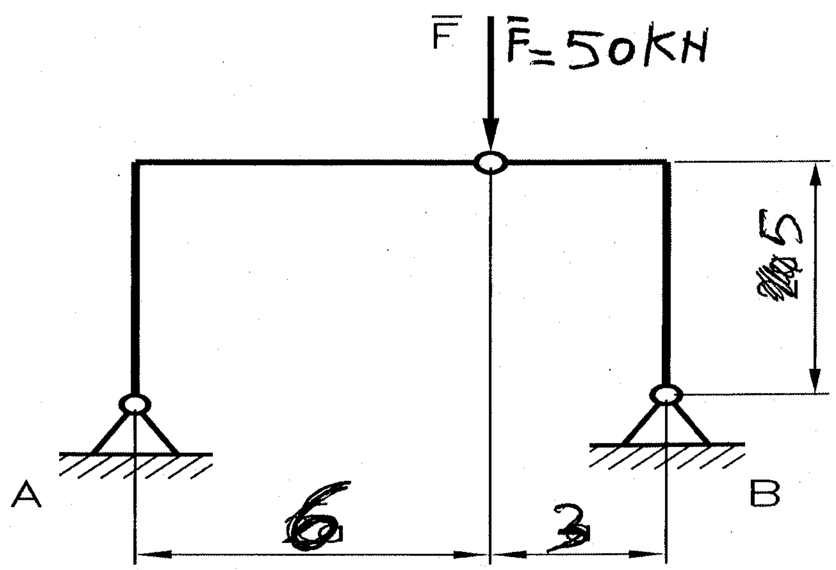
RA = ?

MA = ?

DIAGRAMMI ?


q=10kN/m
F=20kN
α=30°
1,5 m
1,5 m
1 m


q=20kN/m
A
B
q=20kN/m
1 m
1 m
3 m
1,5 m
1 m


F
F=50kN
5
A
B
6
3

## ESERCIZIO N. 12 b)

**Calcolare lo sforzo « S » nel puntone di fig. 25 e la reazione della cerniera C.**

~~(Soluzione: $S = \frac{F}{2}$; $R_c = R_x = \frac{F}{2}$)~~

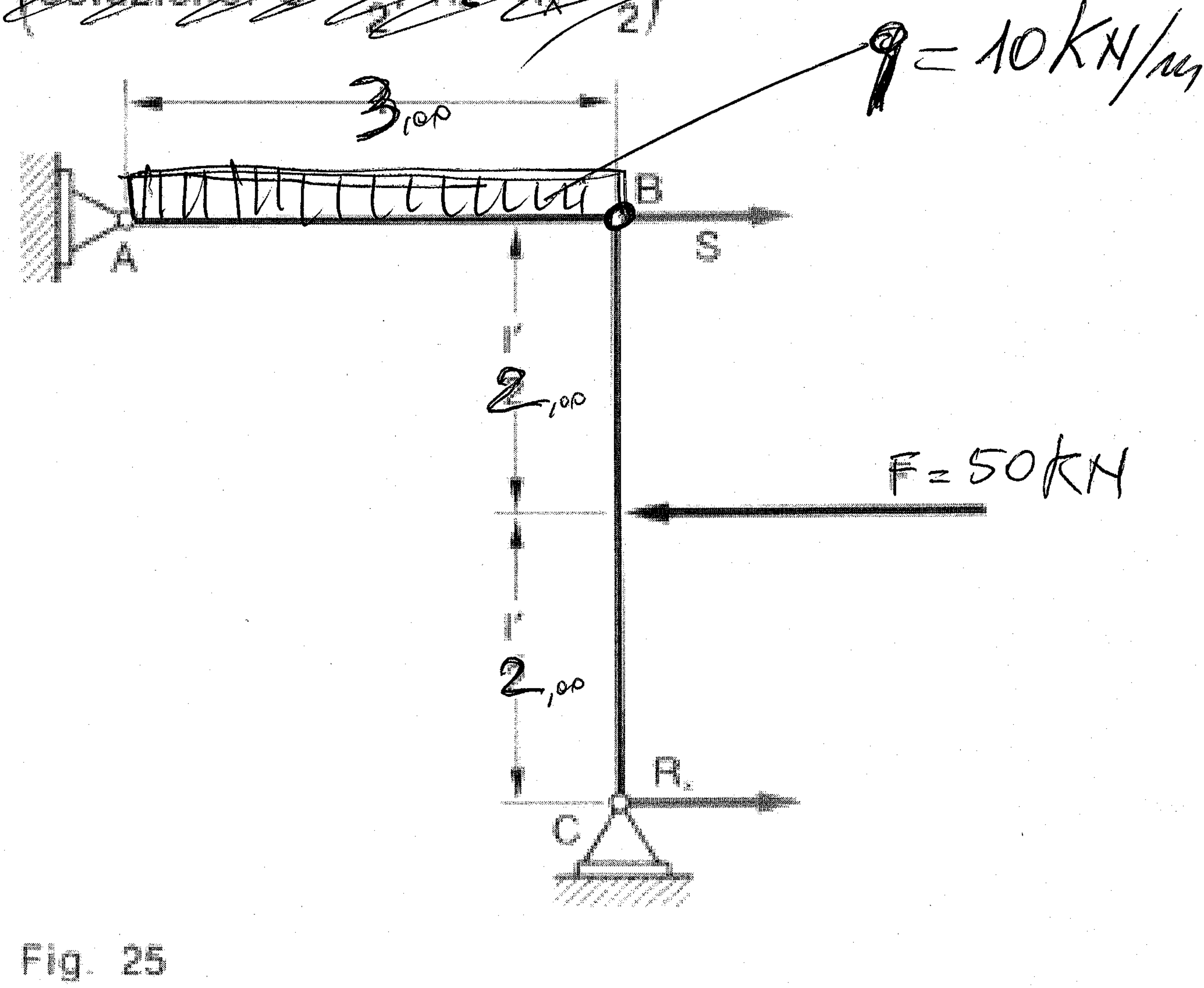
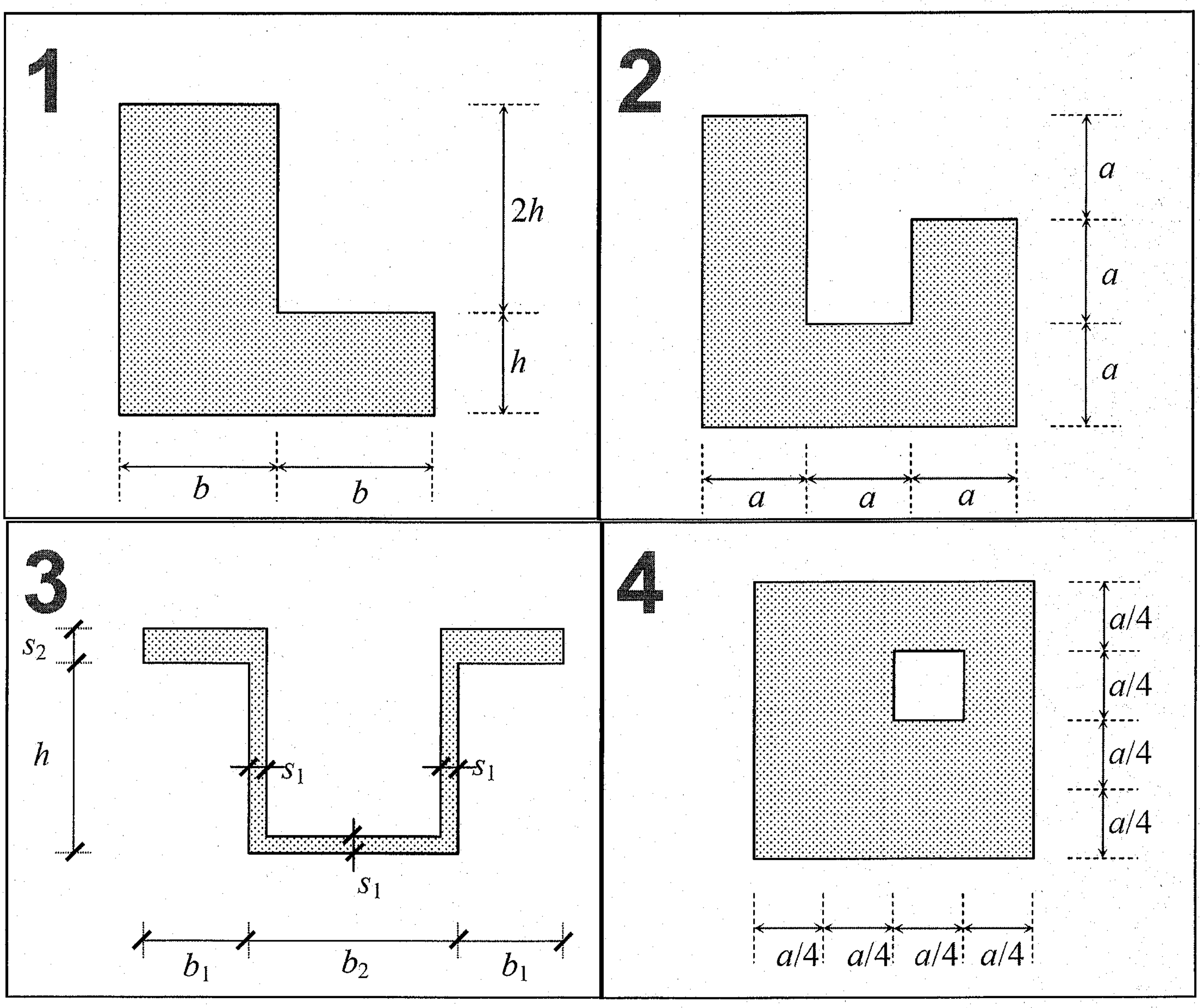



Fig. 25

## Geometria delle Aree

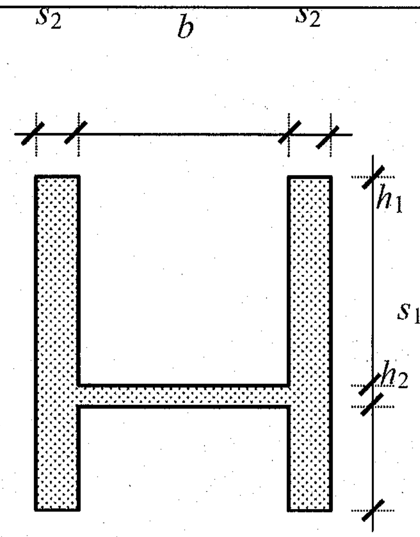
Per ciascuna delle sezioni piane riportate nelle figure seguenti determinare: **a)** la posizione del baricentro; **b)** gli assi principali d'inerzia (*facoltativo* per le sezioni 1 e 2); **c)** i momenti principali d'inerzia (*facoltativo* per le sezioni 1, 2 e 4).
**Sezione 1:** $b$=20 cm, $h$=20 cm. **Sezione 2:** $a$=10 cm. **Sezione 3:** $b_1$=6 cm, $b_2$=8 cm, $h$=12 cm, $s_1$=1 cm, $s_2$= 2 cm. **Sezione 4:** $a$=40 cm.



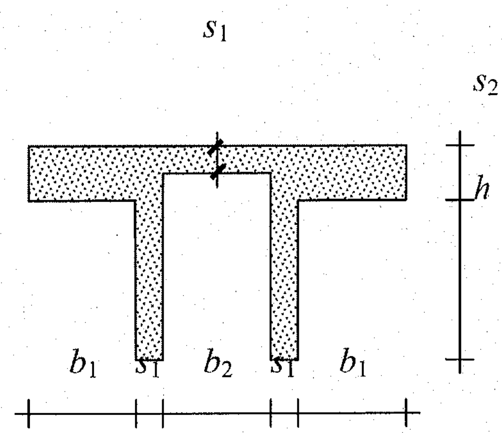
# Geometria delle Aree

Per ciascuna delle sezioni piane riportate nelle figure seguenti determinare: **a)** la posizione del baricentro; **b)** gli assi principali d'inerzia; **c)** i momenti principali d'inerzia.
**Sezione 5** (*proposta nella prova d'esonero del 9.11.2005*)**:** $b$=12 cm, $s_1$=1 cm, $s_2$=2 cm, $h_1$=12 cm, $h_2$=6 cm.
**Sezione 6:** $h$=12 cm, $s_1$=1 cm, $s_2$=2 cm, $b_1$=6 cm, $b_2$=8 cm. **Sezione 7:** $a$=10 cm, $h = a\sqrt{2}$, $s$=1 cm.
**Sezione 8:** $a$=10 cm, $s$=1 cm.

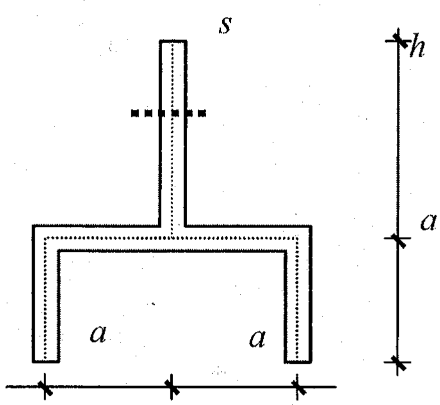
**5**



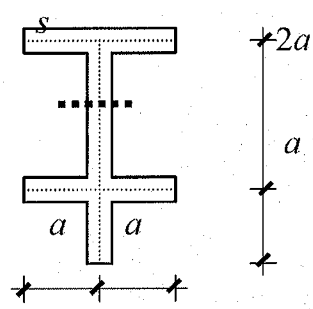

**6**




**7**

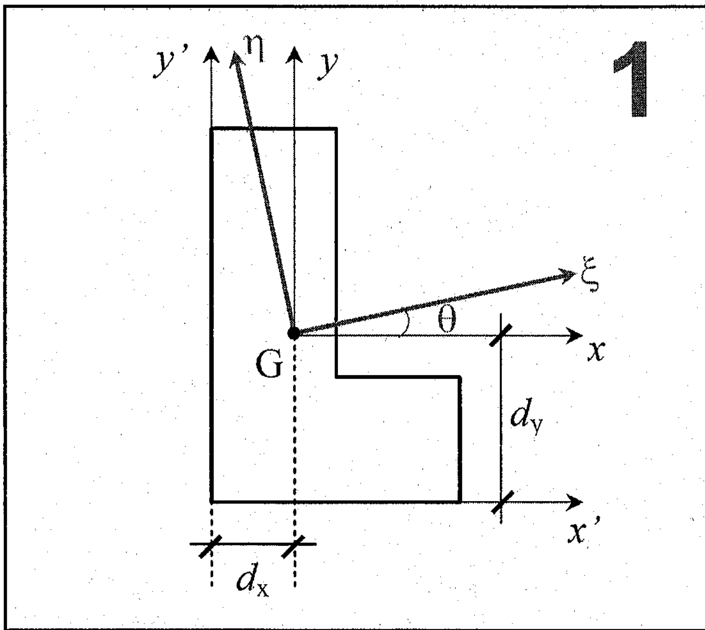


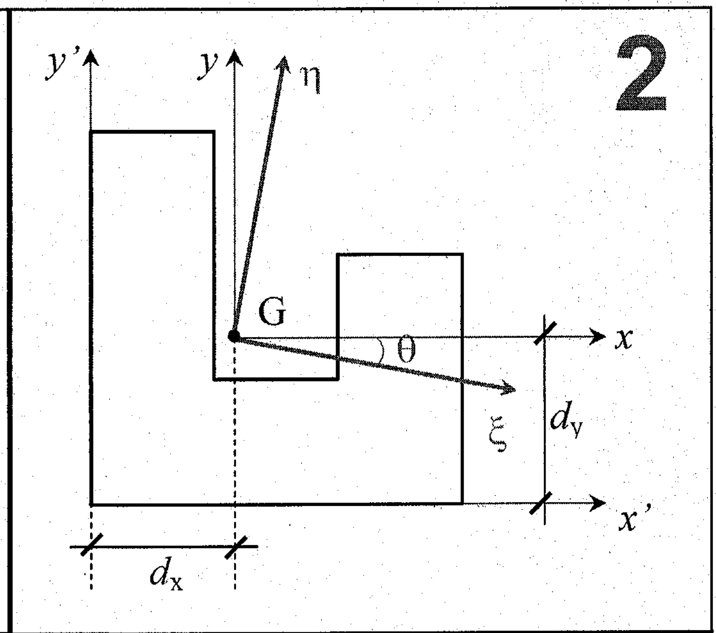

**8**

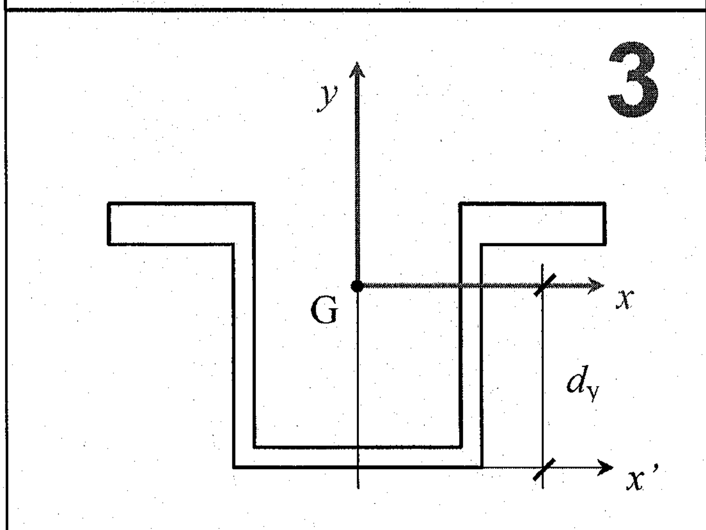


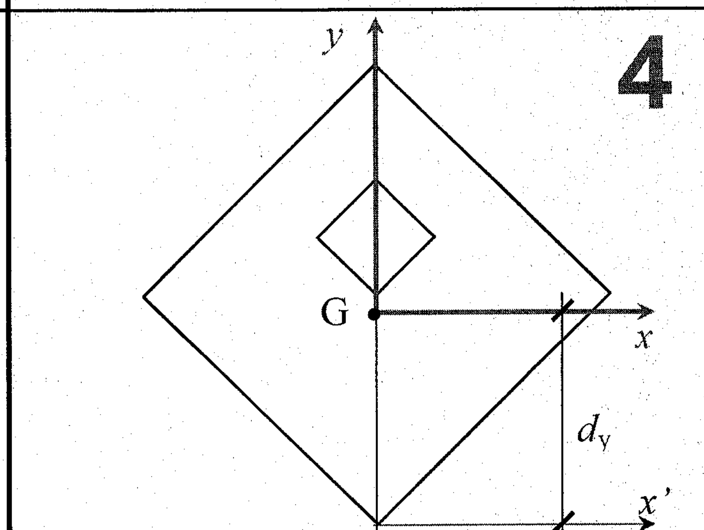

COGNOME.................................................................

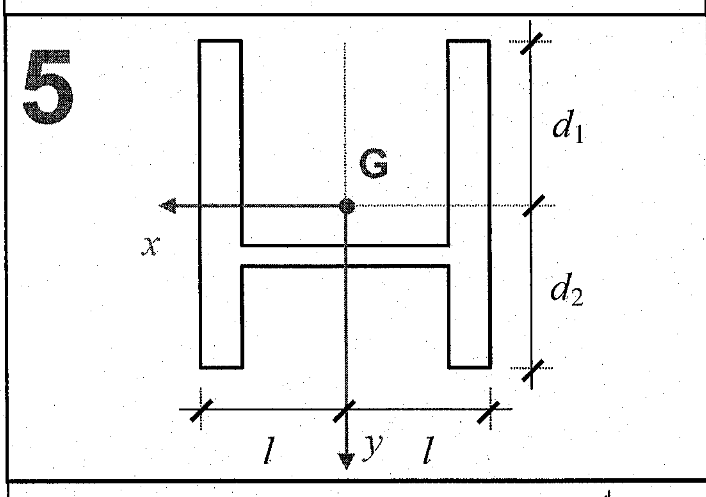
NOME.......................................................................

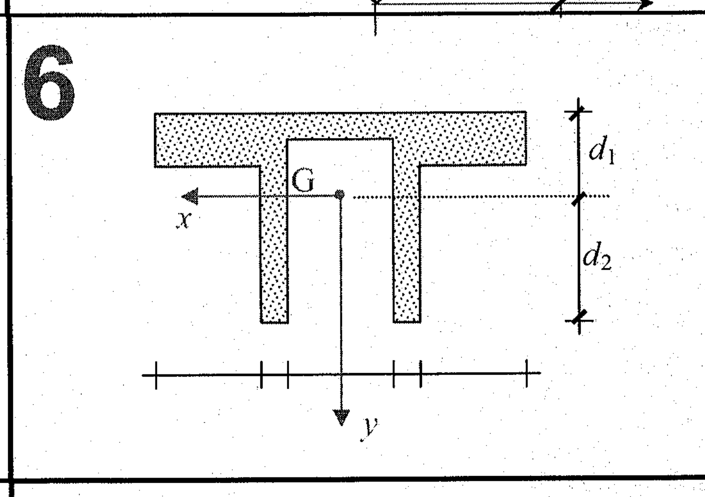

1
y'
η
y
ξ
θ
G
x
$d_y$
x'
$d_x$

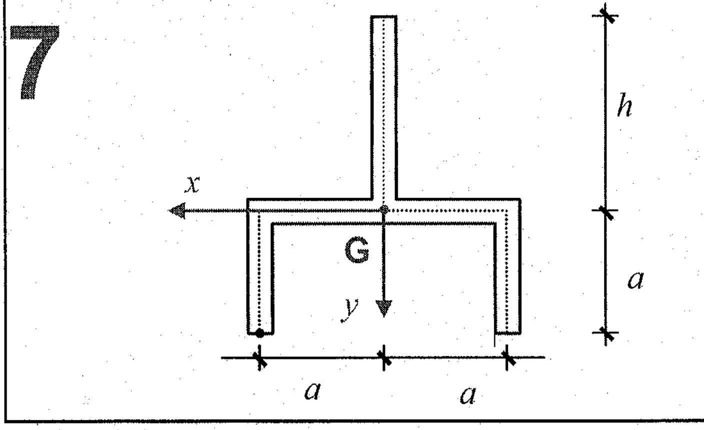

2
y'
y
η
G
θ
x
ξ
$d_y$
x'
$d_x$

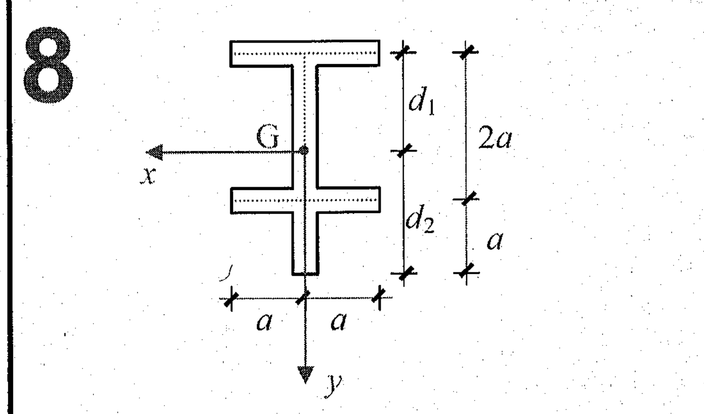

3
y
G
x
$d_y$
x'


4
y
G
x
$d_y$
x'


5
$d_1$
G
x
$d_2$
l
y
l


6
$d_1$
G
x
$d_2$
y


7
h
x
G
y
a
a
a


8
$d_1$
2a
G
x
$d_2$
a
a
a
y

## 2.8 Calcolo delle reazioni vincolari in strutture composte isostatiche - Equazione ausiliaria.

*Esercizio N° 19*

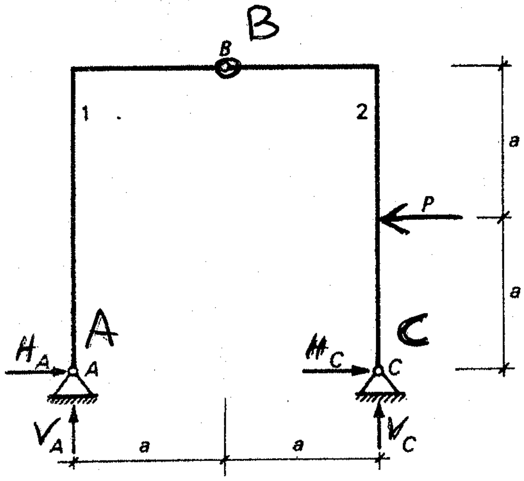



Fig. 2-37

La verifica della isostaticità è stata effettuata al punto a) dell'esercizio n° 18.

Si osserva che le componenti di reazione incognite sono quattro ($V_A$, $H_A$, $V_C$, $H_C$).

Per la loro determinazione abbiamo a disposizione le tre equazioni generali che assicurano lo equilibrio del complesso (due di traslazione e una di rotazione). La quarta equazione si scrive considerando che ogni corpo costituente la struttura deve essere in equilibrio.

Isolando il corpo 1, questo sarà in equilibrio sotto l'azione delle reazioni esterne $H_A$ e $V_A$ e delle azioni $H_B$ e $V_B$ che il corpo 2 trasmette attraverso la cerniera $B$ al corpo 1.

Per eliminare le incognite interne $V_B$ e $H_B$ scriviamo una equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto $B$. Questa quarta equazione è detta *equazione ausiliaria.*

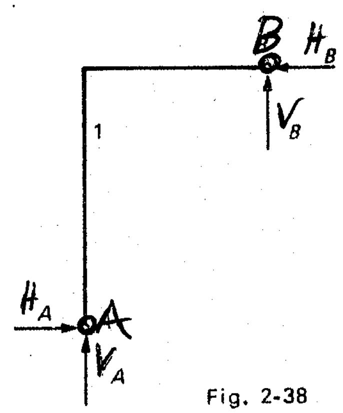



Fig. 2-38

Mediante l'equazione generale $\Sigma M_i = 0$ scritta nel punto $C$ si ricava:

$$V_A \cdot 2a - P \cdot a = 0 \qquad V_A = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma Y_i = 0$$

$$V_A + V_C = 0 \qquad V_C = -\frac{P}{2}$$

$$V_A \cdot a - H_A \cdot 2a = 0$$

$$H_A = \frac{V_A}{2} = \frac{P}{4} \qquad \Sigma X_i = 0$$

$$H_A + H_C - P = 0 \qquad H_C = P - \frac{P}{4} = \frac{3}{4}P$$

## 3.4 Strutture composte.

*Esercizio N° 40*

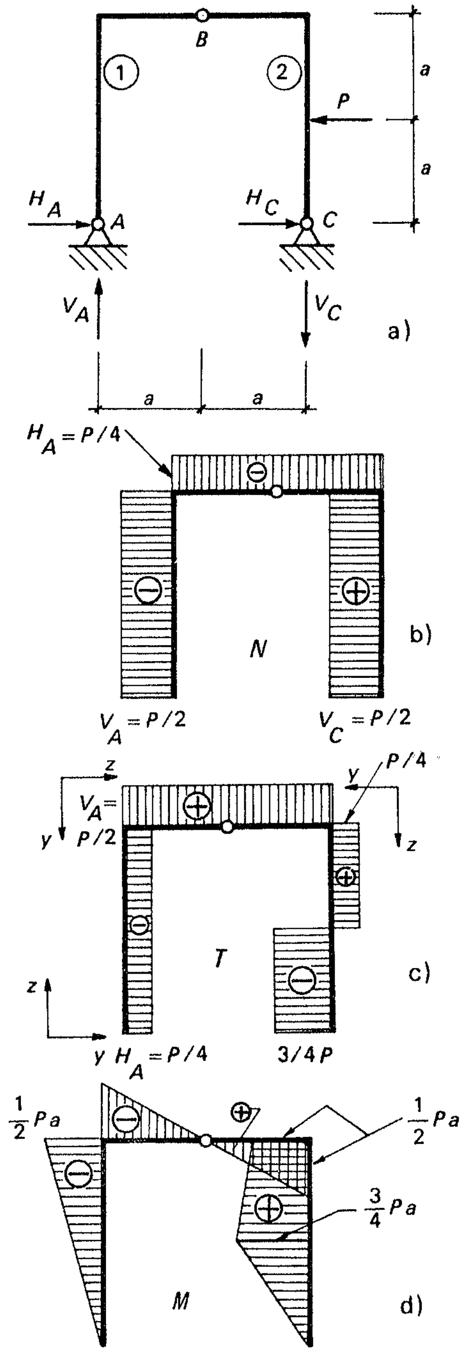



Fig. 3-57

Le reazioni sono state calcolate nell'esercizio N° 19

$$V_A = \frac{P}{2} \quad ; \quad H_A = \frac{P}{4}$$

$$V_C = \frac{P}{2} \quad ; \quad H_C = \frac{3}{4} P$$

- Considerazioni sui diagrammi delle caratteristiche *M, N, T.*

I corpi 1 e 2 (fig. 3-57 a) sono vincolati attraverso la cerniera intermedia *B.*

L'azione che un corpo può trasmettere all'altro è data da una forza che passa per il punto di cerniera, infatti la cerniera non è in grado di trasmettere azioni flettenti.

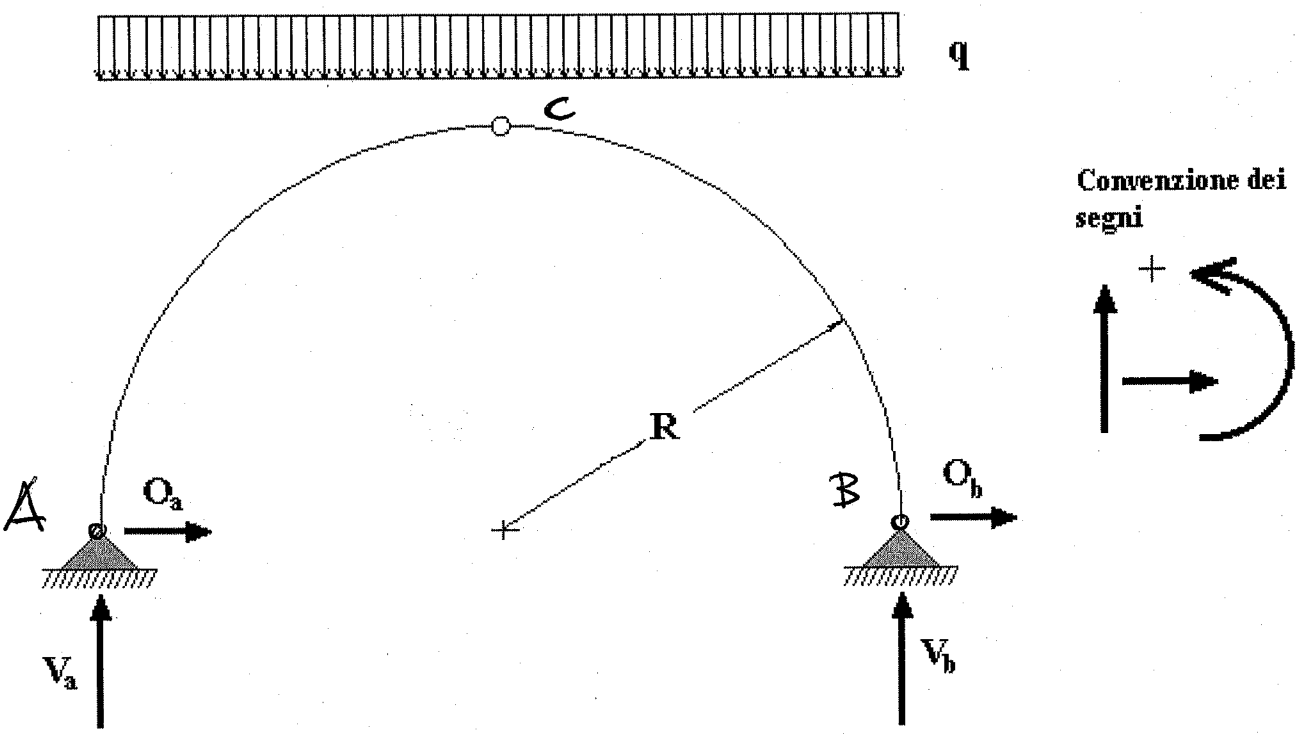
La forza suddetta scomposta secondo l'asse della trave e la sua normale rappresenta lo sforzo normale e lo sforzo tagliante in corrispondenza del punto di cerniera.

*Conclusioni.*

In corrispondenza della cerniera si annulla il diagramma del momento flettente *M* e si trasmettono integralmente gli sforzi normale *N* e tagliante *T.*

# Esercizio - Arco a tre cerniere

Tale esercizio riguarda un arco circolare a tre cerniere di raggio R. Viene risolto per valori generici delle dimensioni e del carico applicato.




(C)
$$\begin{cases} V_a + V_b - q\cdot 2R = 0 \\ O_a + O_b = 0 \\ V_b \cdot 2R - q\cdot 2R\cdot R = 0 \\ V_b\cdot R + O_b\cdot R - q\cdot R\cdot \dfrac{R}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_a = q\cdot 2R - V_b \\ O_a = -O_b \\ V_b\cdot 2R = q\cdot 2R\cdot R \\ O_b\cdot R = q\cdot R\cdot\dfrac{R}{2} - V_b\cdot R \end{cases} \quad \begin{cases} V_a = q\cdot 2R - V_b \\ O_a = -O_b \\ V_b = q\cdot 2R\cdot R\cdot\dfrac{1}{2R} \\ O_b = q\cdot\dfrac{R}{2} - V_b \end{cases} \quad \begin{cases} V_a = q\cdot 2R - V_b \\ O_a = -O_b \\ V_b = q\cdot R \\ O_b = q\cdot\dfrac{R}{2} - q\cdot R \end{cases}$$

Equazione AUSILIARIA

$$\begin{cases} V_a = q\cdot 2R - q\cdot R \\ O_a = -O_b \\ V_b = q\cdot R \\ O_b = \dfrac{q\cdot R - 2q\cdot R}{2} = -\dfrac{q\cdot R}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} V_a = q\cdot R \\ O_a = -\left(-\dfrac{q\cdot R}{2}\right) \\ V_b = q\cdot R \\ O_b = \dfrac{q\cdot R - 2q\cdot R}{2} = -\dfrac{q\cdot R}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} V_a = q\cdot R \\ O_a = \dfrac{q\cdot R}{2} \\ V_b = q\cdot R \\ O_b = \dfrac{q\cdot R - 2q\cdot R}{2} = -\dfrac{q\cdot R}{2} \end{cases}$$

**Il segno meno di $O_b$ ci dice che tale reazione è in realtà diretta verso sinistra.**

$$\begin{cases} O_a + 10.000 - O_b - 2.000 \cdot 2{,}00 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ -10.000 \cdot (2+1) + 2.000 \cdot 2 \cdot \left(\dfrac{2}{2}+1\right) + O_b \cdot 1 + V_b \cdot 4 = 0 \\ -2.000 \cdot 2 \cdot \dfrac{2}{2} - O_b \cdot 2 + V_b \cdot 2 = 0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} O_a - O_b + 6.000 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ -30.000 + 8.000 + O_b \cdot 1 + V_b \cdot 4 = 0 \\ -4.000 - O_b \cdot 2 + V_b \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

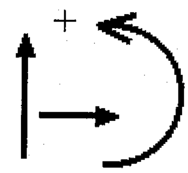
$$\begin{cases} O_a - O_b + 6.000 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ O_b \cdot 1 + V_b \cdot 4 - 22.000 = 0 \\ V_b \cdot 2 = 4.000 + O_b \cdot 2 \end{cases}
\begin{cases} O_a - O_b + 6.000 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ O_b + V_b \cdot 4 - 22.000 = 0 \\ V_b = \dfrac{4.000 + O_b \cdot 2}{2} \end{cases}
\begin{cases} O_a - O_b + 6.000 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ O_b + \dfrac{4.000 + O_b \cdot 2}{2} \cdot 4 - 22.000 = 0 \\ V_b = \dfrac{4.000 + O_b \cdot 2}{2} \end{cases}$$

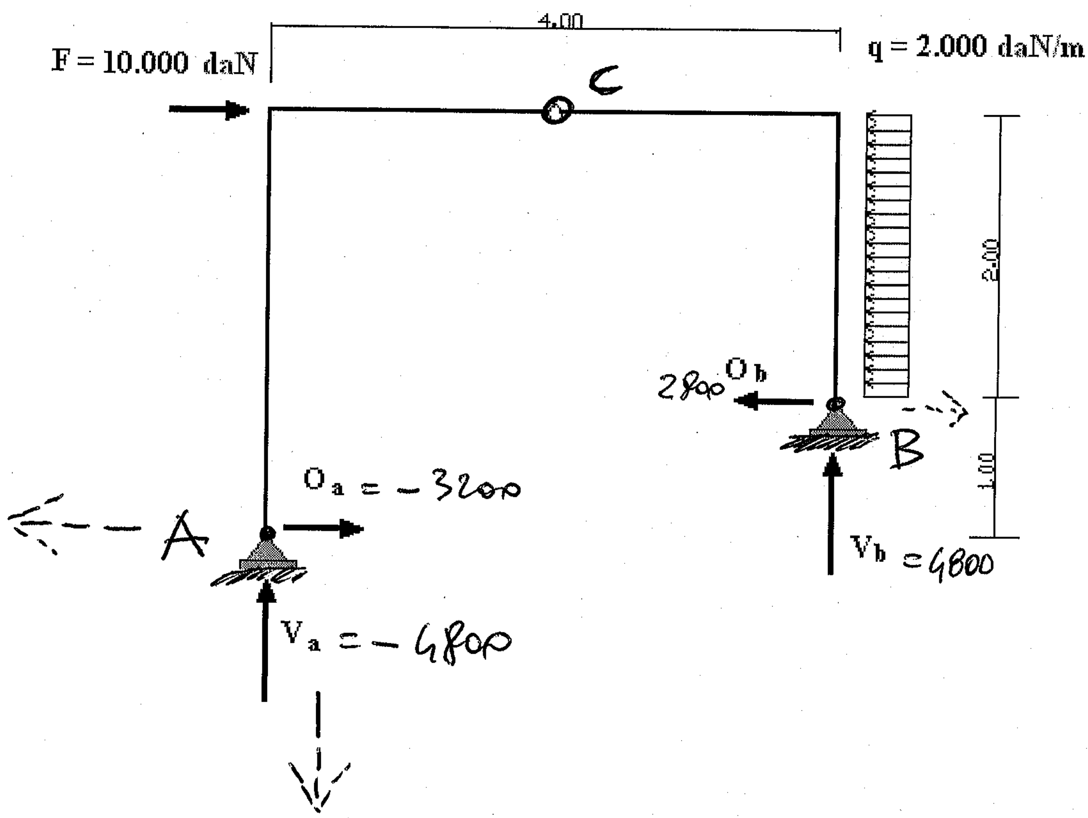
$$\begin{cases} O_a = O_b - 6.000 \\ V_a = -V_b \\ O_b + 8.000 + O_b \cdot 4 - 22.000 = 0 \\ V_b = \dfrac{4.000 + O_b \cdot 2}{2} \end{cases}
\begin{cases} O_a = O_b - 6.000 \\ V_a = -V_b \\ 5 \cdot O_b - 14.000 = 0 \\ V_b = \dfrac{4.000 + O_b \cdot 2}{2} \end{cases}
\begin{cases} O_a = O_b - 6.000 \\ V_a = -V_b \\ O_b = \dfrac{14.000}{5} = 2.800 \\ V_b = \dfrac{4.000 + 2.800 \cdot 2}{2} = 4.800 \text{ daN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_a = 2.800 - 6.000 \\ V_a = -V_b \\ O_b = 2.800 \\ V_b = 4.800 \end{cases}
\begin{cases} O_a = -3.200 \quad d_a N \\ V_a = -4.800 \quad d_a N \\ O_b = 2.800 \quad d_a N \\ V_b = 4.800 \quad d_a N \end{cases}$$

# - Portale zoppo a tre cerniere

**Convenzione dei segni**




Per l'equilibrio alla rotazione si è scelto il punto A.

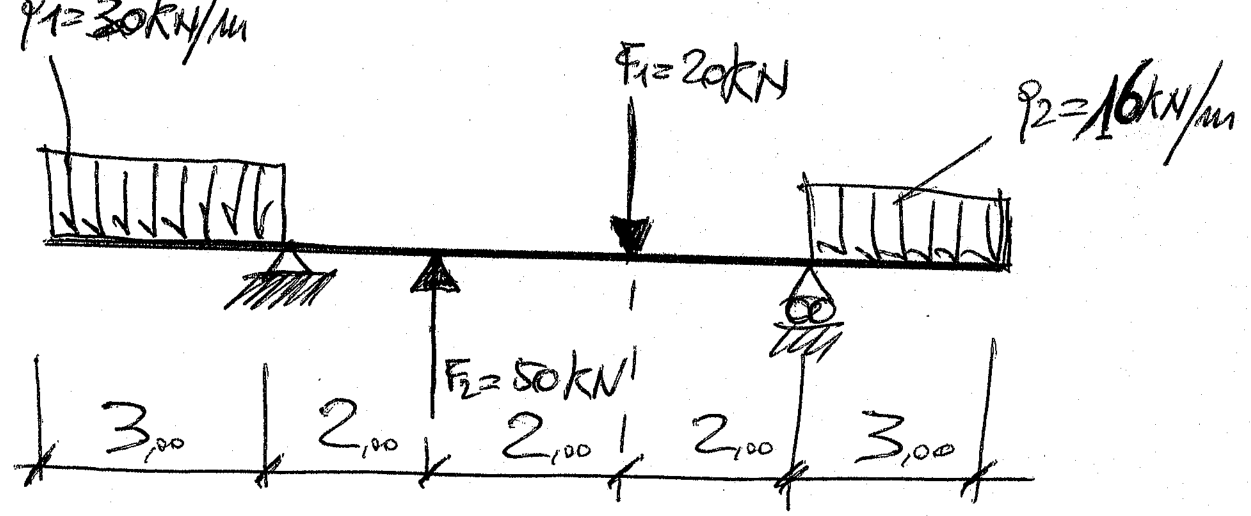
$$\begin{cases} O_a + F - O_b - q \cdot 2{,}00 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ -F \cdot (2+1) + q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2}+1\right) + O_b \cdot 1 + V_b \cdot 4 = 0 & M(A) \\ -q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - O_b \cdot 2 + V_b \cdot \frac{4}{2} = 0 & M(C) \end{cases}$$

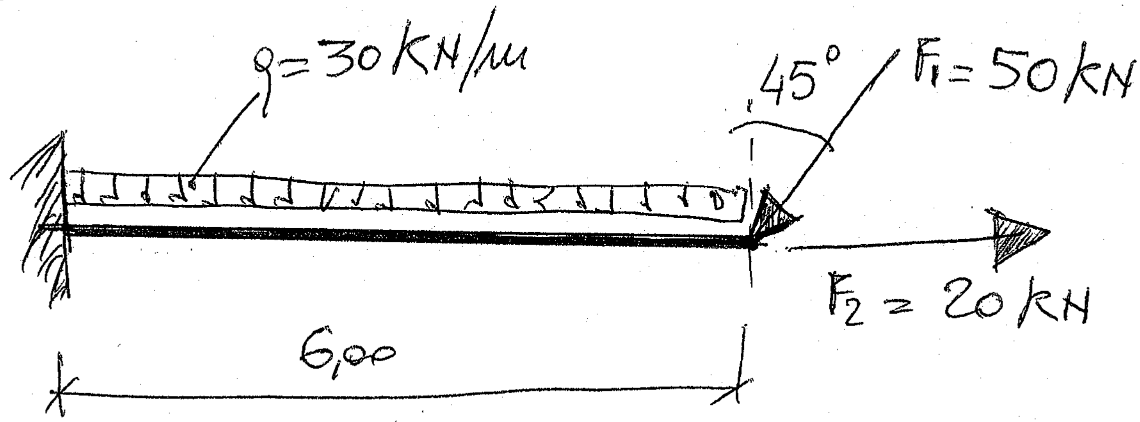
(METÀ STRUTTURA EQUAZIONE AUSILIARIA)

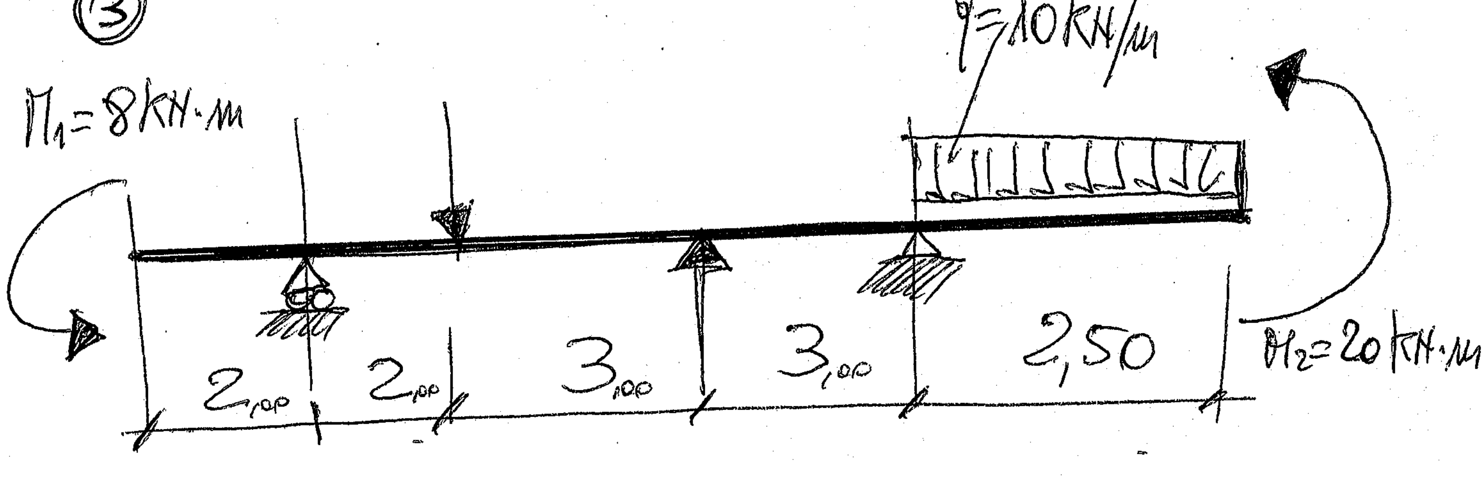

$$\begin{cases} O_a + F - O_b - q \cdot 2{,}00 = 0 \\ V_a + V_b = 0 \\ -F \cdot (2+1) + q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2}+1\right) + O_b \cdot 1 + V_b \cdot 4 = 0 \\ -q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - O_b \cdot 2 + V_b \cdot \frac{4}{2} = 0 \end{cases}$$

# COMPITO DI COSTRUZIONI 3B
## 16 APRILE 2014

DELLE SEGUENTI TRAVI ISOSTATICHE, TROVARE LE REAZIONI VINCOLARI E DISEGNARE I DIAGRAMMI DI: N – T – M

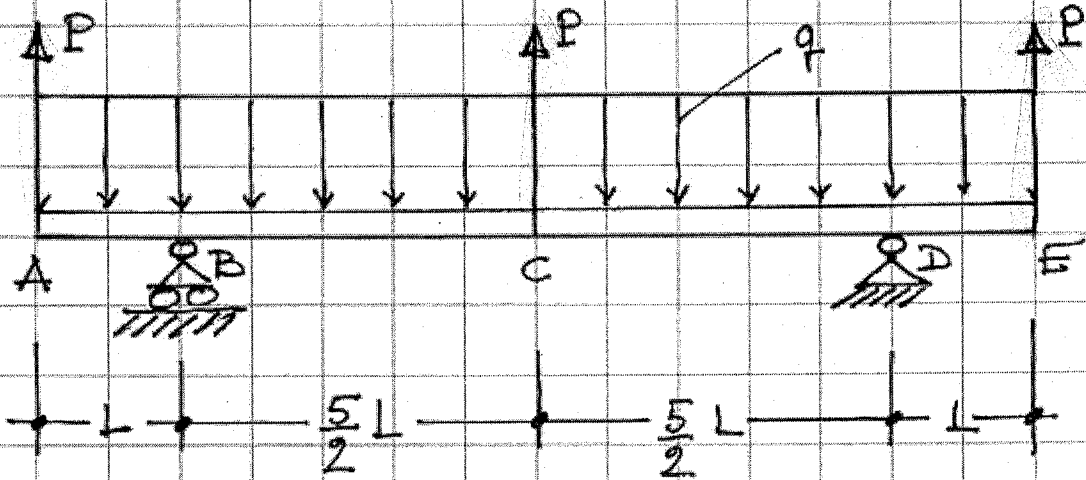
① 


② 


③ 

# ESERCIZIO #2

DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI (RV), LE FUNZIONI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE (CS) E I RELATIVI DIAGRAMMI PER LA STRUTTURA SEGUENTE:

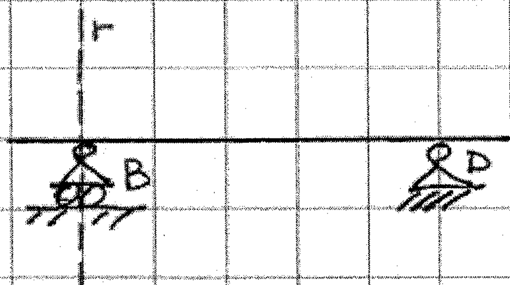



$|P| = qL$

• GRADO DI LABILITÀ APPARENTE:

$$l = 3 - \mu_t = 3 - (1+2) = 0 \Rightarrow \text{C.N. per l'isostaticità ok!}$$

• EFFICACIA CINEMATICA VINCOLI:




CARRELLO B $\Rightarrow$ CENTRO ASSOLUTO DI ROTAZIONE $\in r$

CERNIERA D $\Rightarrow$ CENTRO ASSOLUTO DI ROTAZIONE $\equiv D$

$\Rightarrow \nexists$ UN CENTRO ASSOLUTO DI ROTAZIONE

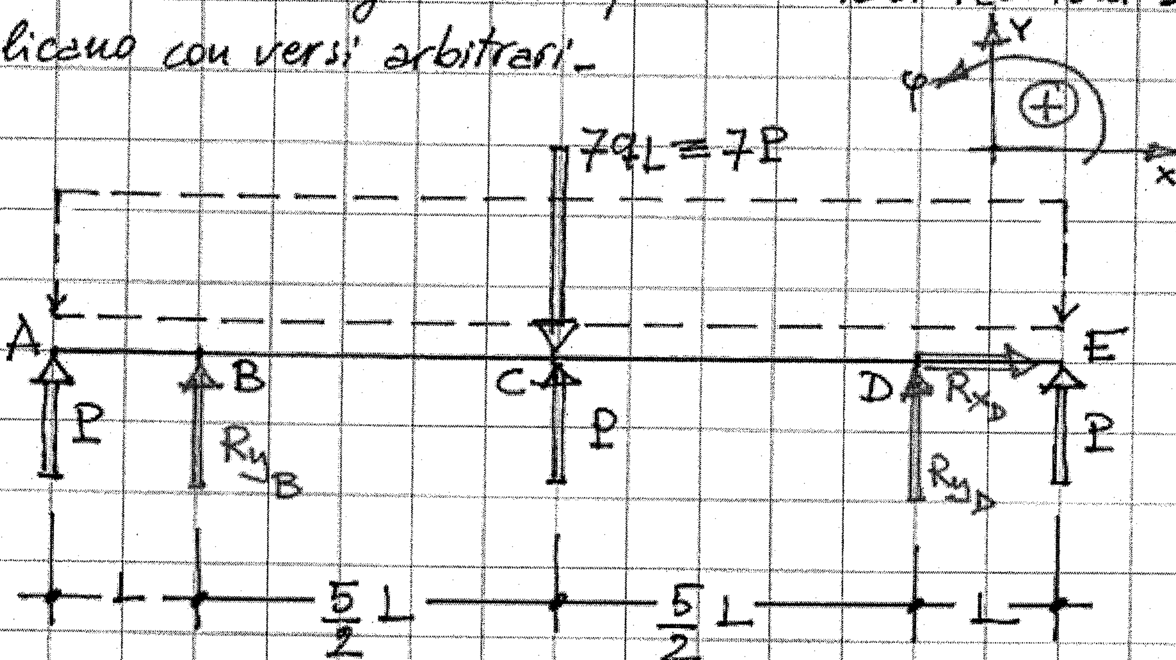
$\Downarrow$

IL SISTEMA È ISOSTATICO!

• DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI (RV)

RV – metodo analitico

1. Ai fini della valutazione delle RV i carichi distribuiti possono essere sostituiti con carichi concentrati equivalenti.
2. Si risolve il sistema in termini di reazioni vincolari, a tal fine i vincoli sono sostituiti dalle reazioni che essi sono potenzialmente in grado di esplicare. Tali reazioni si applicano con versi arbitrari.




$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \boxed{R_{x_D} = 0} \; ①$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P + R_{y_B} + P - 7P + R_{y_D} + P = 0 \rightarrow \boxed{R_{y_B} = 2P} \; ③$$

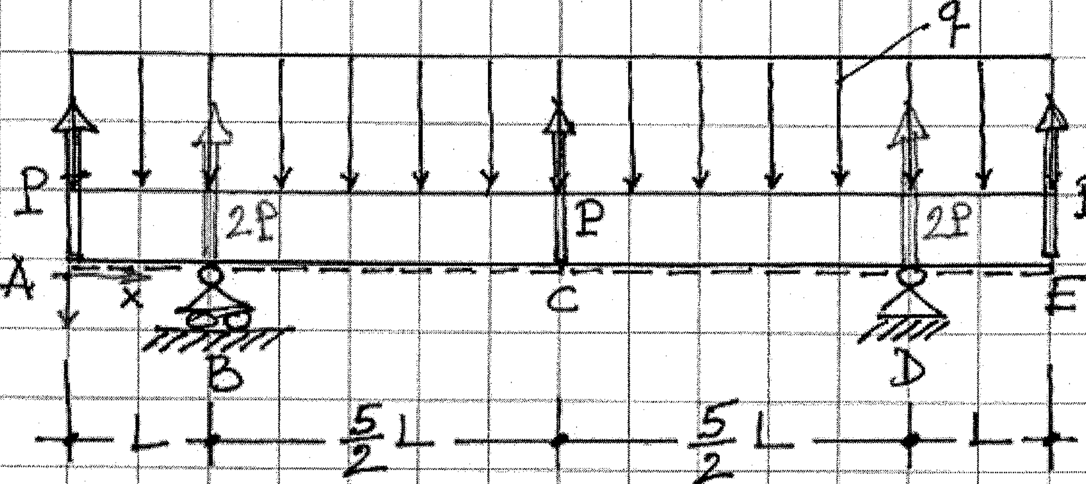
$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow \cancel{-P\cdot\frac{7}{2}L} - R_{y_B}\cdot\frac{5}{2}L + R_{y_D}\cdot\frac{5}{2}L + \cancel{P\cdot\frac{7}{2}L} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{R_{y_B} = R_{y_D}} \; ②$$

N.B.: ① = primo risultato; ② = secondo risultato;
③ = terzo risultato (ottenuto per sostituzione di ②).

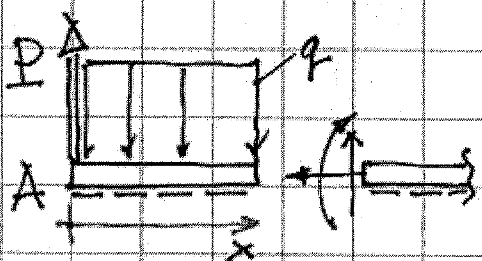
- **DETERMINAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE**

CS – metodo della sezione ideale per il calcolo di $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$.




$|P| = qL$

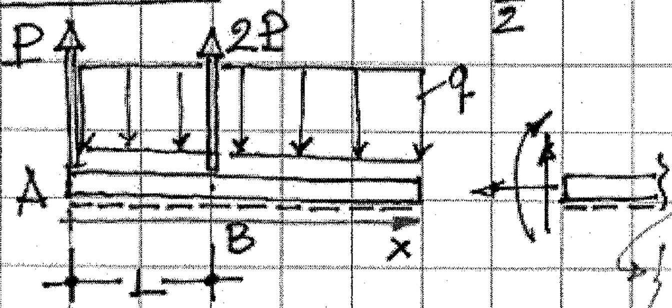
TRATTO AB $\quad 0 \le x \le L$




$N(x) = 0; \quad T(x) = P - qx \quad \begin{cases} T_A = T(x)|_{x=0} = P \\ T_B = T(x)|_{x=L} = 0 \end{cases}$

$M(x) = Px - q\dfrac{x^2}{2} \quad \begin{cases} M_A = M(x)|_{x=0} = 0 \\ M_B = M(x)|_{x=L} = \dfrac{PL}{2} \end{cases}$

TRATTO BC $\quad L \le x \le \frac{7}{2}L$

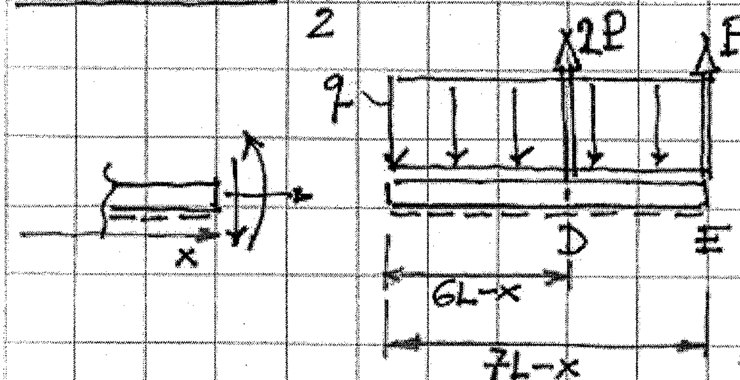



$N(x) = 0; \quad T(x) = P + 2P - qx \quad \begin{cases} T_B = T|_{x=L} = 2P \\ T_C = T|_{x=\frac{7}{2}L} = -\dfrac{P}{2} \end{cases}$

$M(x) = Px + 2P(x-L) - \dfrac{qx^2}{2}$

$\begin{cases} M_B = M(x)|_{x=L} = \dfrac{PL}{2} \\ M_C = M(x)|_{x=\frac{7}{2}L} = \dfrac{19}{8}PL \end{cases}$

TRATTO CD $\quad \frac{7}{2}L \le x \le 6L$



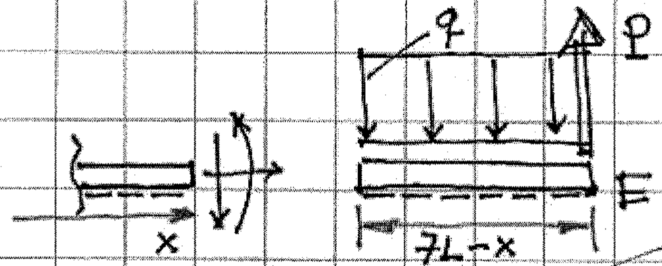

$N(x) = 0;$

$T(x) = -P - 2P + q(7L - x) \quad \begin{cases} T_C = T|_{x=\frac{7}{2}L} = \dfrac{P}{2} \\ T_D = T|_{x=6L} = -2P \end{cases}$

$M(x) = P(7L-x) + 2P(6L-x) + - q\dfrac{(7L-x)^2}{2}$

$\begin{cases} M_C = M(x)|_{x=\frac{7}{2}L} = \dfrac{19}{8}PL \\ M_D = M(x)|_{x=6L} = \dfrac{PL}{2} \end{cases}$

TRATTO DE $6L \le x \le 7L$




$N(x) = 0$; $\left\{ \begin{array}{l} T_D = T(x)|_{x=6L} = 0 \\ T_E = T(x)|_{x=7L} = -P \end{array} \right.$

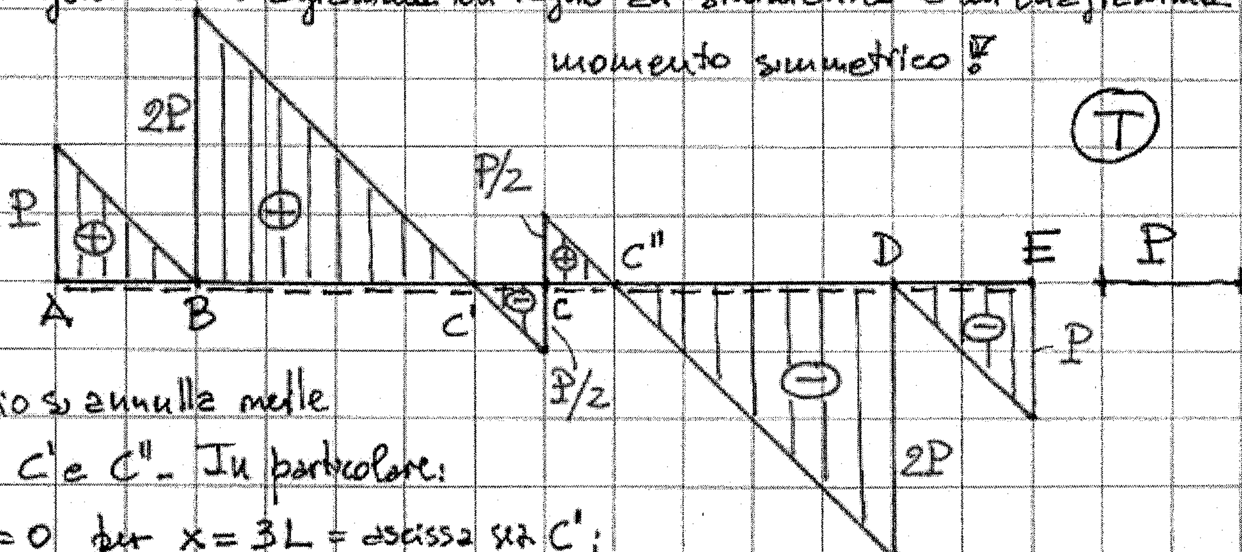
$T(x) = -P + q(7L-x)$

$$M(x) = P(7L-x) - q\frac{(7L-x)^2}{2}$$

$$M_D = M(x)|_{x=6L} = \frac{PL}{2}\ ;\ M_E = M(x)|_{x=7L} = 0$$

## CS - diagrammi

• Lo sforzo normale è ovunque nullo! La simmetria geometrica e di carico genera un diagramma di taglio antisimmetrico e un diagramma di momento simmetrico!



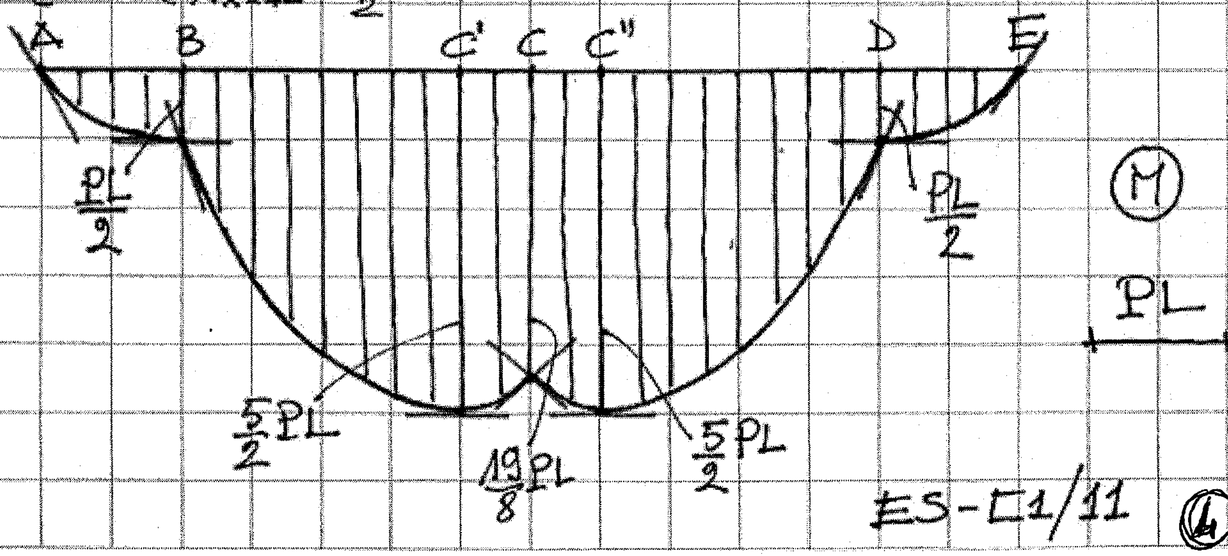

Il taglio si annulla nelle sezioni C' e C''. In particolare:

$T(x)^{BC} = 0$ per $x = 3L$ = ascissa sez C';

$T(x)^{CD} = 0$ per $x = 4L$ = ascissa sez. C''.

In tali sezioni il momento è max $\rightarrow$ $M^{BC}_{max} = M_{C'} = M(x)^{BC}|_{x=3L} = \frac{5}{2}PL$,

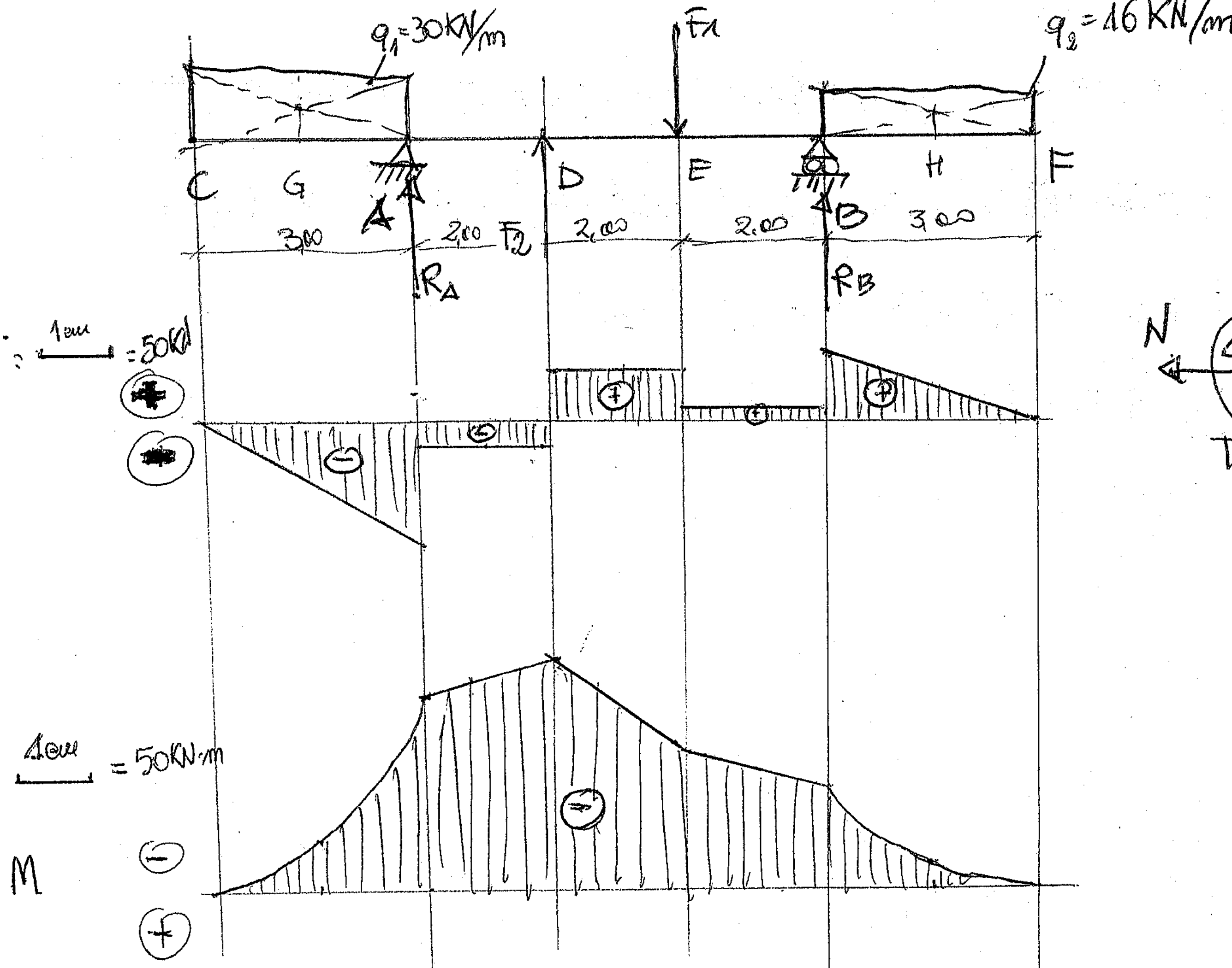
$M^{CD}_{max} = M_{C''} = M(x)^{CD}|_{x=4L} = \frac{5}{2}PL$.

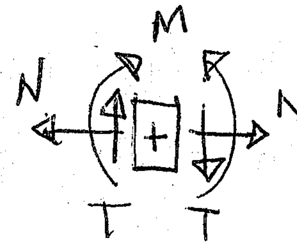


ESERCIZIO 1

$F_1 = 20$ KN
$F_2 = 50$ KN
$Q_1 = 90$ KN
$Q_2 = 48$ KN

$R_A = 73{,}84$ KN
$R_B = 34{,}16$ KN




$T_C = 0$

$T_{A(S)} = -Q_1 = 90$ KN

$T_{A(D)} = -Q_1 + R_A = 90 + 73{,}84 = 16{,}16$ KN

$T_{D(S)} = 16{,}16$

$T_{D(D)} = -Q_1 + R_A + F_2 = -90 + 73{,}84 + 50 = 33{,}83$ KN

$T_{E(S)} = F_1 - R_B + Q_2 = 20 - 34{,}16 + 48 = 33{,}83$ KN

$T_{E(D)} = -R_B + Q_2 = -34{,}16 + 48 = 13{,}84$ KN

$T_{B(D)} - Q_2 = 48$ KN

Esercizio 2

$F_1 = 50\,KN$

$F_2 = 20\,KN$

$q = 30\,KN/m$

$F_{1x} = 35{,}35$

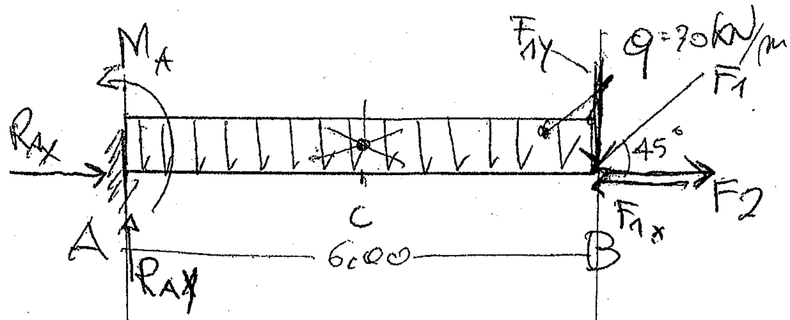
$F_{1y} = 35{,}35$

$F_2 = 20\,KN$

$R_{Ax} = 15{,}35$

$R_{Ay} = 215{,}35$

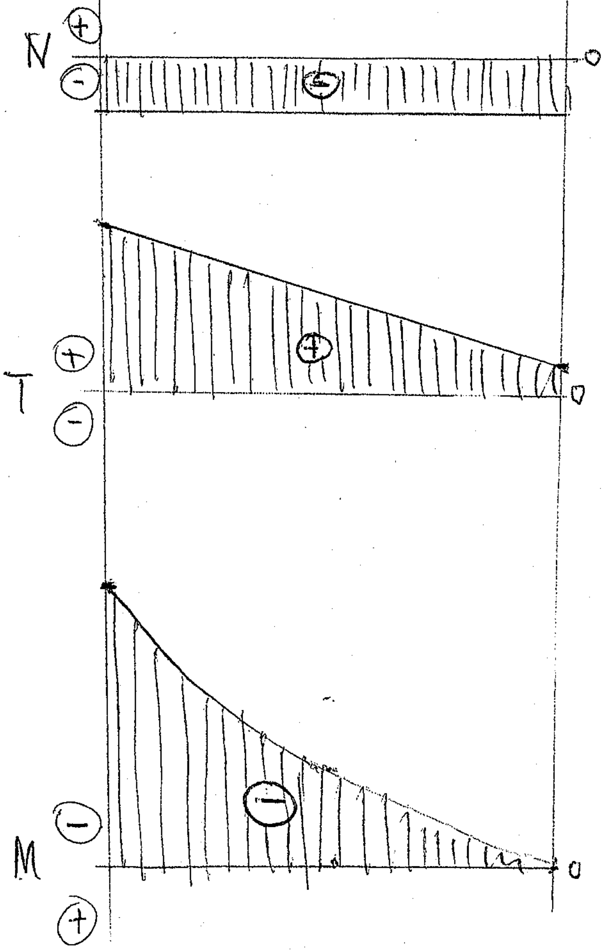
$M_A = 752{,}10\,K$

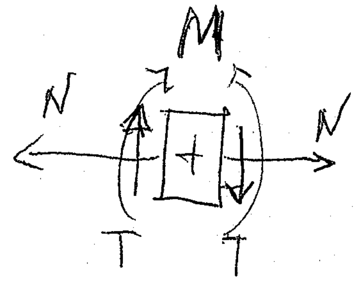



N 1 cm = 20 KN

T 1 cm = 100 KN

M 1 cm = 200 KNm




$N_{(A)} = -R_{Ax} = -15{,}3\,KN$

$N_{(B)} = F_2 - F_{1x} = 20 - 35{,}35 = -15{,}35\,KN$

$T_{(A)} = +R_{Ay} = 215{,}35\,KN$

$T_{(B)} = +F_{1y} = 35{,}35\,KN$

$M_{(A)} = -M_A = -752{,}10\,KN$

$M_{(B)} = 0$

$M_{(C)} = -\left(q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}\right) + R_{Ay} \cdot 3 \underbrace{}_{-M_A} = -30 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 215{,}35 \cdot 3 - 752{,}10 = -241{,}05\,KNm$

Esercizio 3

$M_1 = 8 KNm$

$M_2 = 20 KN\cdot m$

$F_1 = 20 KN$

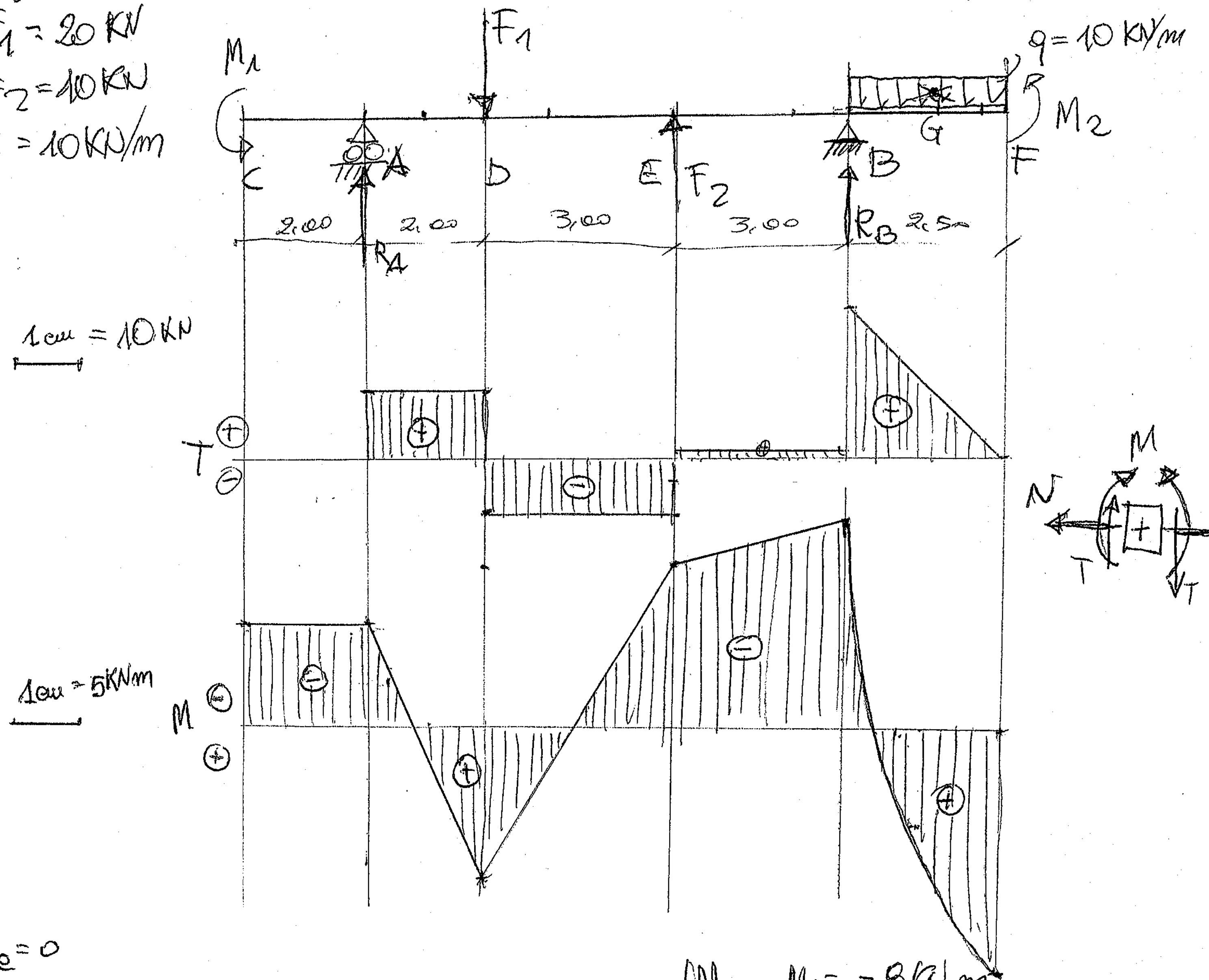
$F_2 = 10 KN$

$q = 10 KN/m$

$R_A = 10,84 K$

$R_B = 24,16 K$

$Q = 10\cdot 2,5 = 25$




$T_C = 0$

$T_{A(D)} = +R_A = 10,84 KN$

$T_{D(S)} = R_A = 10,84$

$T_{D(D)} = R_A - F_1 = 10,84 - 20 = -9,16 KN$

$T_{E(S)} = T_{D(D)} = -9,16$

$T_{E(D)} = -R_B + Q = -24,16 + 25 = +0,84 KN$

$T_{B(S)} = T_{ED} = +0,84 KN$

$T_{B(D)} = +Q = 25 KN$

$T_F = 0$

$M_C = -M_1 = -8 KNm$

$M_A = -M_1 = -8 KNm$

$M_D = -M_1 + R_A\cdot 2 = -8 + 10,84\cdot 2 = 13,68$

$M_E = R_B\cdot 3 - Q\cdot(3+1,25) + \overset{M_2}{\cancel{}} = 24,16\cdot 3 - 25\cdot(4,25) + \underset{20}{\cancel{}} = -13,77 KNm$

$M_B = -Q\cdot 1,5 + M_2 = -25\cdot 1,5 + 20 = -$

$M_G = -\left(q\cdot 1,5\cdot \frac{1,5}{2}\right) + M_2 = 8,75$

$M_F = M_2 = 20 KNm$