

$$P_2 = 10 \text{ kN}$$

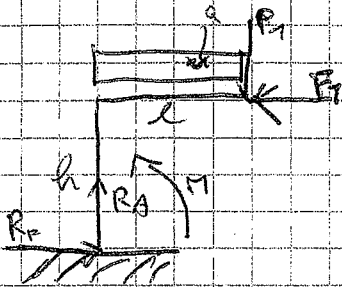
$$h = 3 \text{ m}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = -R_A + P_2 = 0 \\ \sum M = (\cancel{R_A \cdot 0}) + (P_2 \cdot 2) + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = -10 \text{ kN} \\ M_A = -20 \text{ kNm} \end{cases}$$



$$P_1 = 10 \text{ kN}$$

$$q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$F_1 = 3 \text{ kN}$$

$$h = 3 \text{ m}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

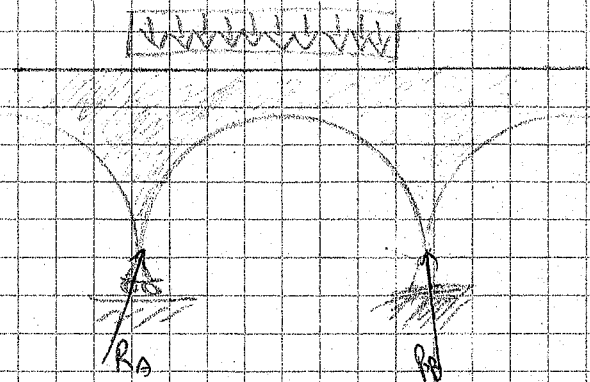
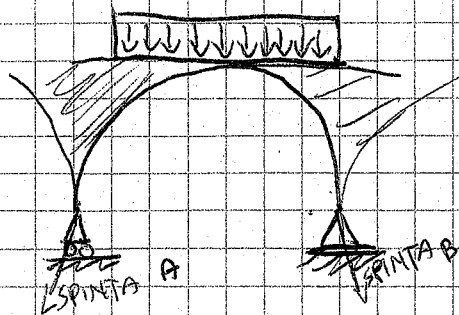
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = +R_F + F_1 = 0 \\ \sum F_y = (q \cdot l) + P_1 - R_A \\ \sum M_A = (q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) + (P_1 \cdot l) - (\cancel{R_A \cdot 0}) + M_A - (F_1 \cdot 3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_F = +3 \text{ kN} \\ R_A = 10 + 10 = -20 \text{ kN} \\ -M_A = (10 \cdot 2) + 20 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_F = +3 \text{ kN} \\ R_A = -20 \text{ kN} \\ M_A = -20 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \end{cases}$$

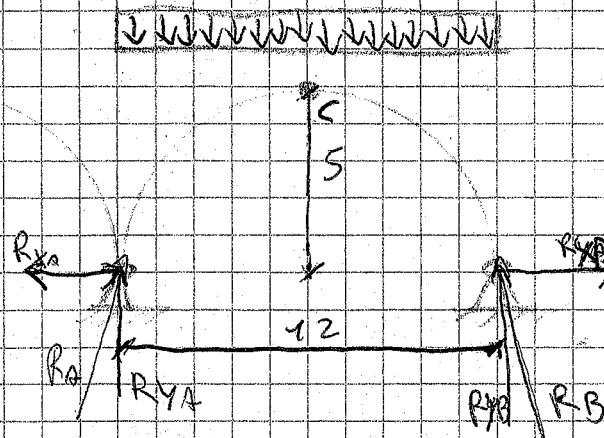
6-21 ARCHI



$$3m = 1 \cdot a + 2 \cdot c + 3 \cdot i$$

$$3 = 1 + 2$$

$$3 = 3$$



$$q = \frac{8 \text{ kN}}{\text{m}}$$

$$R_{Ax} = ? - 86,4 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} = ? - 48 \text{ kN}$$

$$R_{Bx} = ? - 86,4 \text{ kN}$$

$$R_{By} = ? - 48 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \\ \sum M_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = R_{xA} + R_{xB} \\ \sum F_y = (q \cdot l) + R_{yA} + R_{yB} \\ \sum M_a = (q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) + (R_{xB} \cdot 0) + (R_{yA} \cdot 0) + (R_{yB} \cdot l) \\ \sum M_c = (R_{xA} \cdot 5) + (R_{yA} \cdot 6) - (q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = -R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 96 - R_{yA} - R_{yB} = 0 \\ \sum M_a = 576 - (R_{yB} \cdot 12) = 0 \\ \sum M_c = (R_{xA} \cdot 5) + (R_{yA} \cdot 6) - 744 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = -R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 96 + R_{yA} - R_{yB} = 0 \\ R_{yB} = \frac{576}{12} = 48 \\ \sum M_c = (R_{xA} \cdot 5) + (R_{yA} \cdot 6) - 744 = 0 \end{cases}$$

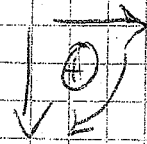
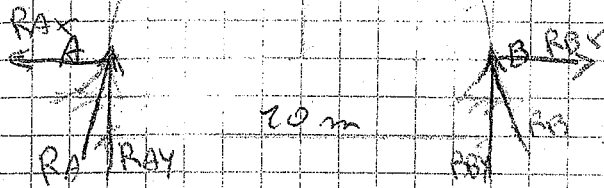
$$\begin{cases} \sum F_x = -R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 96 + R_{yA} - 48 = 0 \\ R_{yB} = -48 \text{ kN} \\ \sum M_c = (R_{xA} \cdot 5) + (R_{yA} \cdot 6) - 744 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = -R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ R_{yA} = -48 \text{ kN} \\ R_{yB} = -48 \text{ kN} \\ \sum M_c = R_{xA} = (-48 \cdot 6) - 744 = 0 \end{cases}$$

$q = 2 \text{ kN/m}$

$l = 10$

$h = 5 \text{ m}$

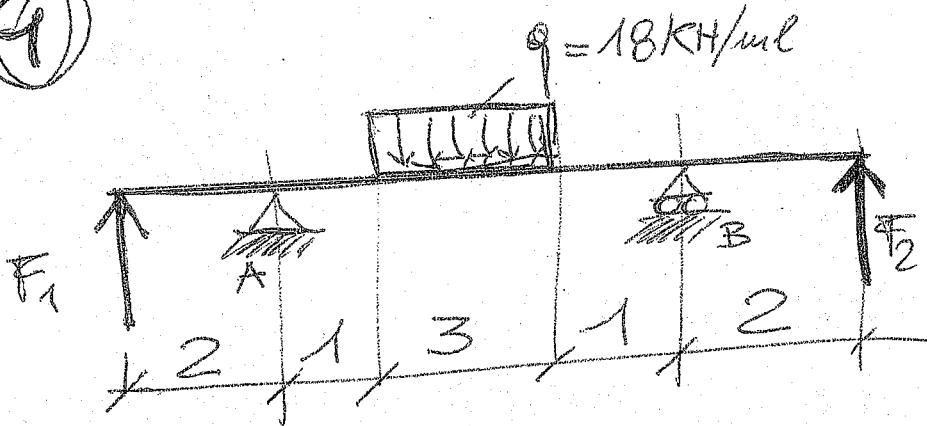


$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} \\ \sum F_y = R_{Ay} + R_{By} + (q \cdot l) \\ \sum M_A = (R_{Ax} \cdot 0) + (R_{By} \cdot 0) + (R_{Bx} \cdot 0) - (R_{By} \cdot 10) + (q \cdot l \cdot 7.5) \\ \sum M_C = -(R_{Bx} \cdot 5) - (R_{By} \cdot 5) + (q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} \\ \sum F_y = R_{Ay} + R_{By} + 10 \\ \sum M_A = 75 - R_{By} \cdot 10 \\ \sum M_C = (-R_{Bx} \cdot 5) - (R_{By} \cdot 5) + 25 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} \\ \sum F_y = R_{Ay} + R_{By} + 10 \\ R_{By} = \frac{75}{10} = -7.5 \\ \sum M_C = (-R_{Bx} \cdot 5) - 37.5 + 25 \end{array} \right.$$

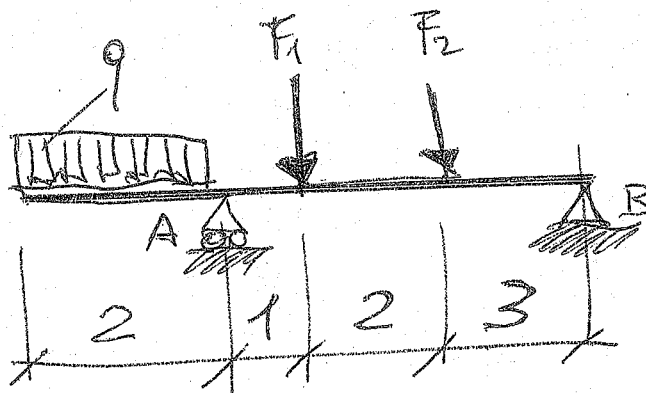
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} \\ R_{Ay} = -7.5 + 10 = -2.5 \text{ kN} \\ R_{By} = -7.5 \text{ kN} \\ R_{Bx} = \frac{-37.5 + 25}{5} = -2.5 \text{ kN} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = -2.5 \text{ kN} \\ R_{Ay} = -2.5 \text{ kN} \\ R_{By} = -7.5 \text{ kN} \\ R_{Bx} = -2.5 \text{ kN} \end{array} \right.$$

①



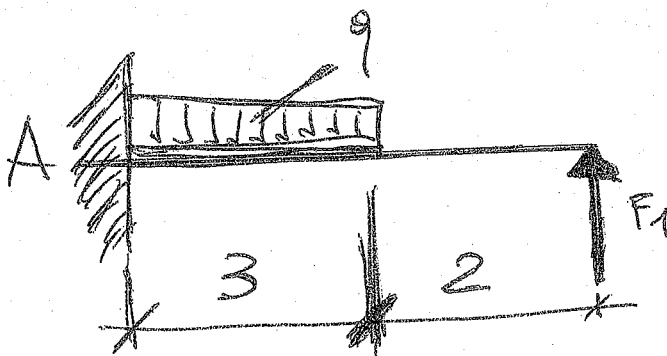
$F_1 = 10 \text{ kN}$
 $q = 18 \text{ kN/m}$
 $F_2 = 4 \text{ kN}$
 $R_A = ?$
 $R_B = ?$

②



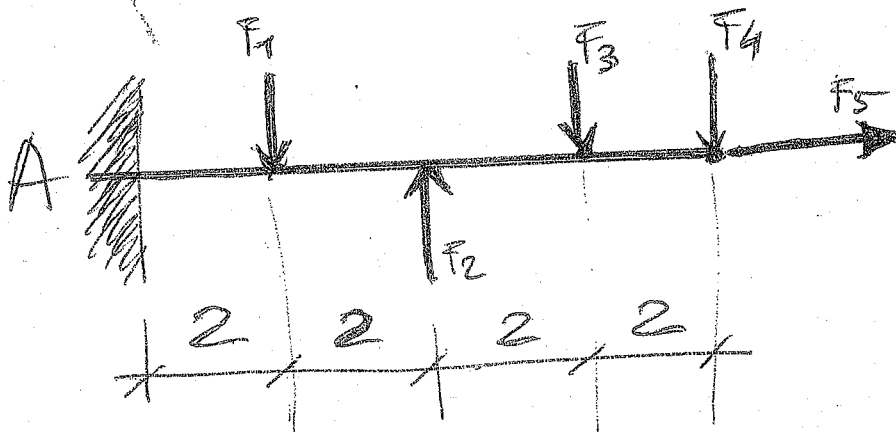
$q = 10 \text{ kN/m}$
 $F_1 = 30 \text{ kN}$
 $F_2 = 5 \text{ kN}$
 $R_A = ?$
 $R_B = ?$

③

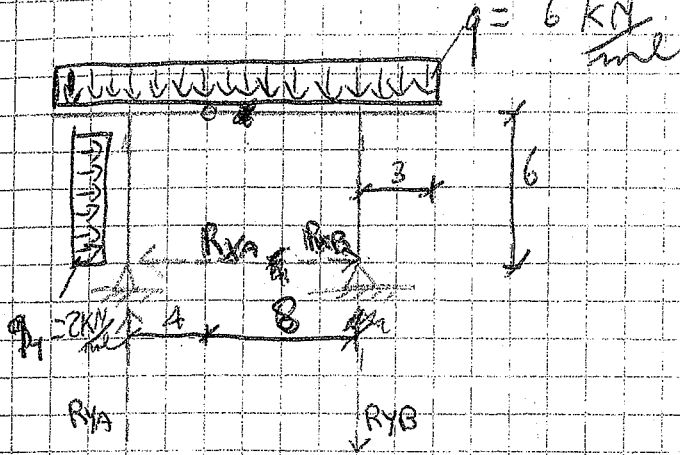


$q = 20 \text{ kN/m}$
 $F_1 = 12 \text{ kN}$
 $R_A = ?$
 $M_A = ?$

④



$F_1 = 10 \text{ kN}$
 $F_2 = 4 \text{ kN}$
 $F_3 = 6 \text{ kN}$
 $F_4 = 8 \text{ kN}$
 $F_5 = 12 \text{ kN}$
 $R_A = ?$
 $M_A = ?$



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = (q_1 \cdot l) - R_{xA} + R_{xB} \\ \sum F_y = (q \cdot l) - R_{yA} - R_{yB} \\ \sum M_B = (q_1 \cdot l \cdot 3) - (R_{xB} \cdot 0) - (R_{yB} \cdot 0) - (R_{xA} \cdot 0) + (R_{yA} \cdot 12) - (q \cdot l \cdot 4) \\ \sum M_C = (R_{xB} \cdot 6) - (R_{yB} \cdot 8) + (q \cdot 11 \cdot 5.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 12 - R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 108 - R_{yA} - R_{yB} = 0 \\ \sum M_B = 36 + (R_{yA} \cdot 12) + 432 = 0 \\ \sum M_C = (R_{xB} \cdot 6) - (R_{yB} \cdot 8) + 363 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 12 - R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 108 - R_{yA} - R_{yB} = 0 \\ R_{yA} = 12 \cdot \frac{36 + 432}{12} = \frac{468}{12} = 39 \end{cases}$$

$$\sum M_C = (R_{xB} \cdot 6) - (R_{yB} \cdot 8) + 363 = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 12 - R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 108 + 39 + R_{yB} = 0 \\ R_{yB} = -39 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M_C = (R_{xB} \cdot 6) - (R_{yB} \cdot 8) + 363 = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 12 - R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ R_{yA} + R_{yB} = -108 + 39 = -69 \\ R_{yA} = -39 \text{ kN} \\ \sum M_C = (R_{xB} \cdot 6) - (-69 \cdot 8) + 363 = 0 \end{cases}$$

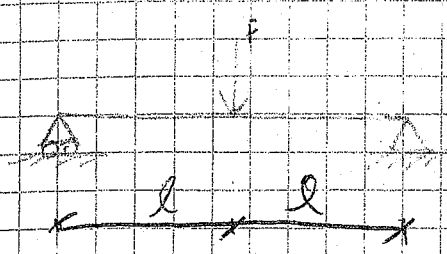
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 12 - R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ R_{yB} = -69 \text{ kN} \\ \cancel{R_{yA}} = -39 \text{ kN} \\ \sum M_C = -(R_{xB} \cdot 6) \left(\cancel{+552} + 363 \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 12 - R_{xA} + R_{xB} = 0 \\ R_{yB} = -69 \text{ kN} \\ R_{yA} = -39 \text{ kN} \\ \frac{R_{xB} \cdot 6}{6} = \frac{-289}{6} = -37,5 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -R_{xA} = -12 + 37,5 \text{ kN} = +25,5 \text{ kN} \\ R_{yB} = -69 \text{ kN} \\ R_{yA} = -39 \text{ kN} \\ R_{xB} = -37,5 \text{ kN} \end{array} \right.$$

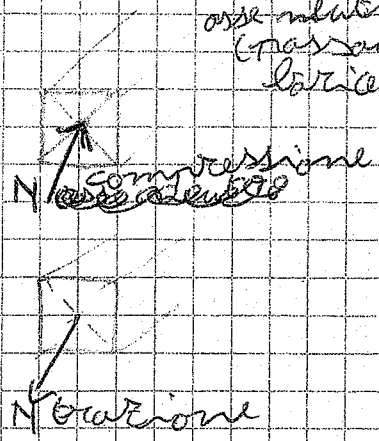
DIAGRAMMI DI SOLLECITAZIONE (PUNTA) ^{CON}

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} F$$



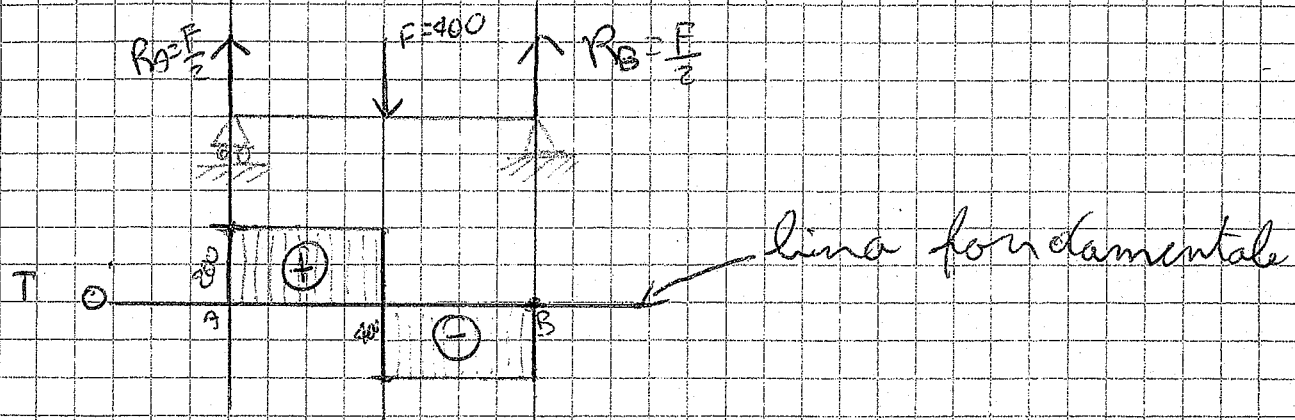
N = sforzo normale

asse neutro (passante dal centro)



- 1) N (sforzo normale) trazione, compressione
- 2) Taglio

DIAGRAMMA TAGLIO



- 1) tracciare delle linee verticali lungo ~~gli~~ i nodi
- 2) tracciare una linea verticale lungo la forza concentrata
- 3) tracciare, ad una certa distanza dalla trave, una linea orizzontale.

$$T_A = +500 \text{ KN}$$

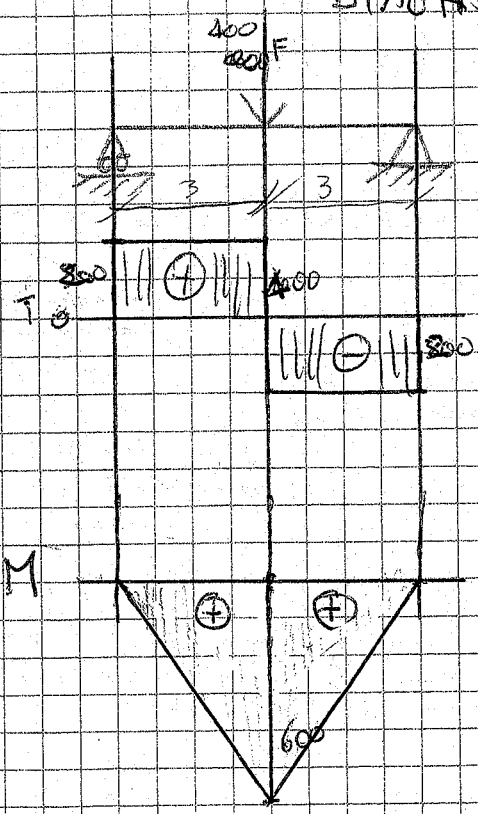
$$T_{BC} = +500 \text{ KN}$$

$$T_C = 1000 \text{ KN}$$

$$T_{DC} = 500 \text{ KN}$$

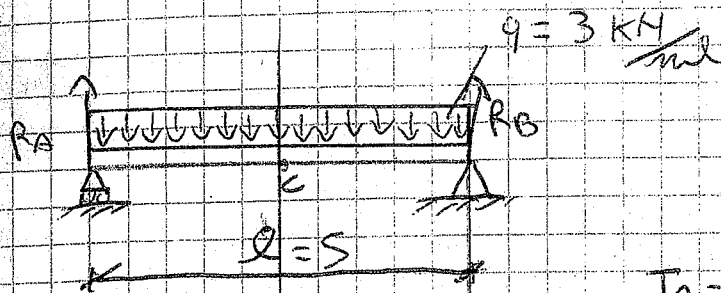
$$T_B = -500 \text{ KN}$$

DIAGRAMMA MOMENTI



$$M_c = R_a \cdot l_1 = 200 \cdot 3 = 600 \text{ KN}$$

DIAGRAMMA DEI SOLLECITAZIONE | DISTRIBUITO



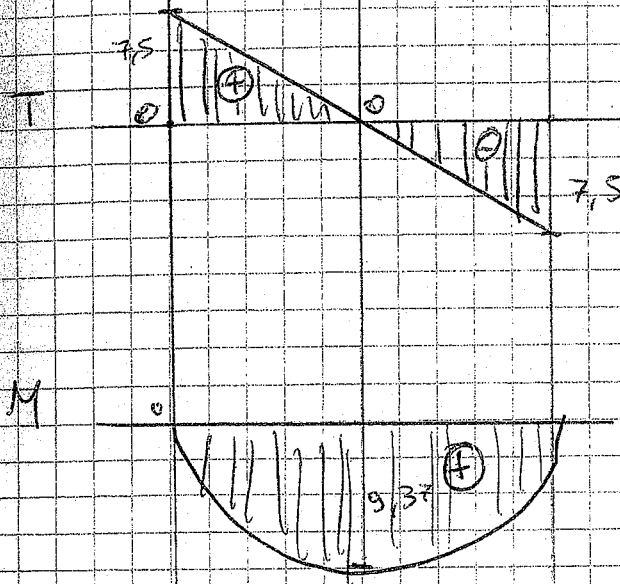
$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$$

$$T_A = R_A = 7,5 \text{ kN}$$

$$T_{SA} = 0$$

$$T_{SB} = R_A - q \cdot l = 7,5 - 7,5 = 0$$

$$T_{SB} = R_A - q \cdot \frac{l}{2} = 7,5 \text{ kN}$$



$$M_A = 0$$

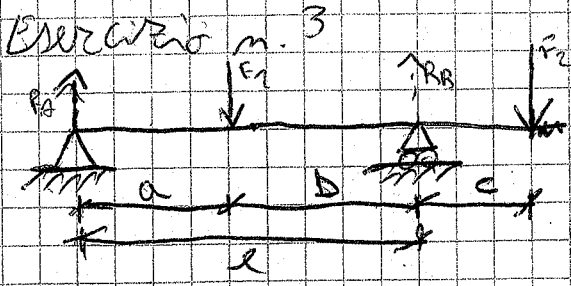
$$M_B = 0$$

$$M_C = R_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} =$$

$$= 7,5 \cdot 2,5 - 3 \cdot 2,5 \cdot 1,25 =$$

$$= 18,75 - 9,38 = 9,37$$

$$M_C = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$



- $a = 2 \text{ m}$
- $b = 2,5 \text{ m}$
- $c = 1,5 \text{ m}$
- $F_1 = 10 \text{ kN}$
- $F_2 = 15 \text{ kN}$
- $R_A = -0,6 \text{ kN}$
- $R_B = -24,4 \text{ kN}$

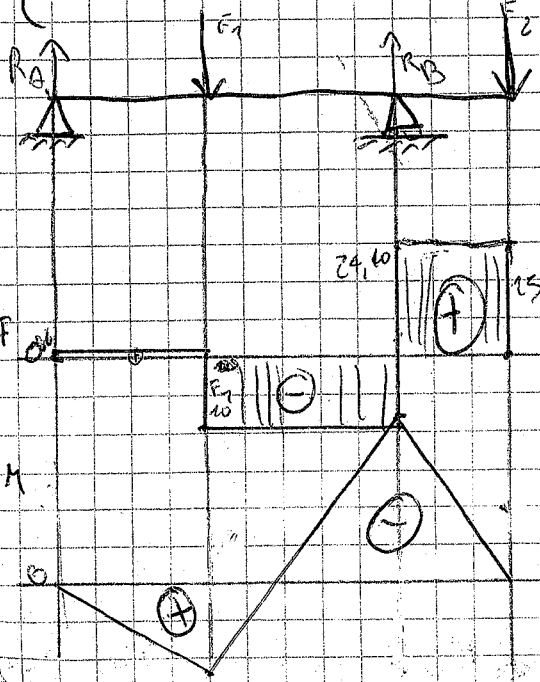
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = F_1 - R_A - R_B + F_2 = 0 \\ \sum M_A = (R_A \cdot 0) + (F_1 \cdot a) - (R_B \cdot l) + (F_2 \cdot l_1) \end{cases}$$

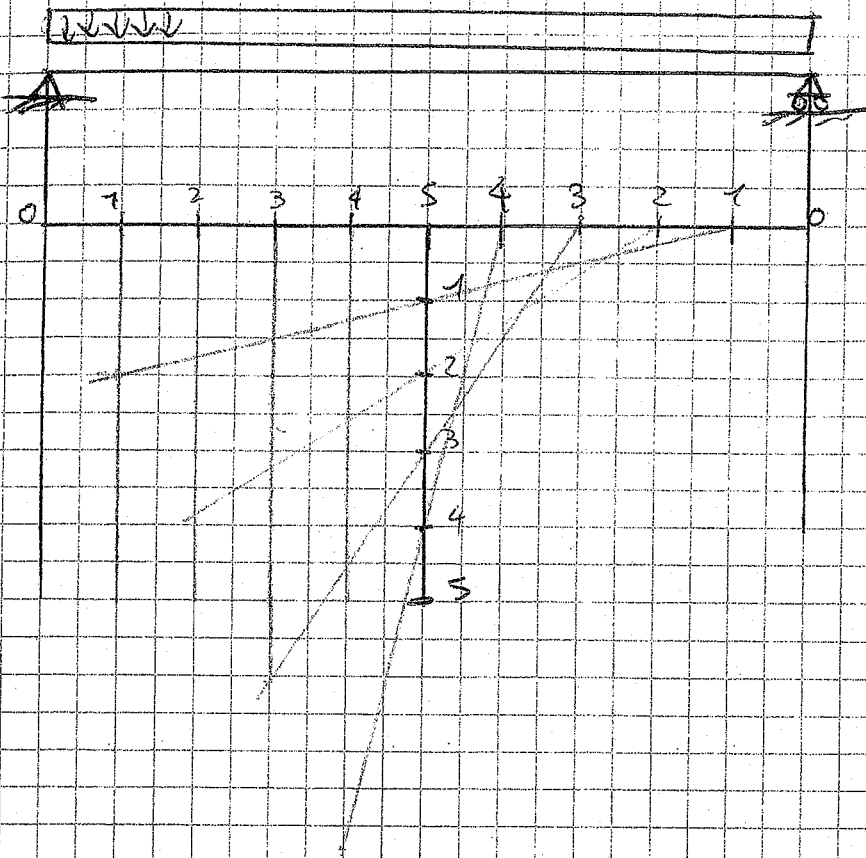
$$\begin{cases} \sum F_y = 10 - R_A - R_B + 15 = 0 \\ \sum M_A = 20 - R_B \cdot 4,5 + 90 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = 25 - R_A - R_B = 0 \\ \cancel{20} - R_B \cdot \cancel{4,5} = \frac{-10}{4,5} = -24,4 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A = -25 + 24,4 = -0,6 \text{ kN} \\ R_B = -24,4 \text{ kN} \end{cases}$$



- $T_A = 0$
- $T_A = R_A = 0,6 \text{ kN}$
- $T_{F_1} = R_A = 0,6 \text{ kN}$
- $T_{F_1} = 10 \text{ kN}$
- $T_{R_B} = -R_A + F_1 = 9,4 \text{ kN}$
- $T_{R_B} = 24,40$
- $T_{F_2} = -R_A + F_1 - R_B = 15$
- $T_{F_2} = 0$

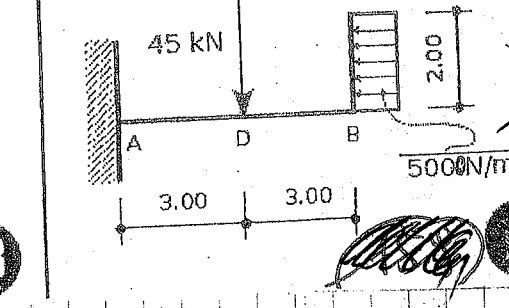
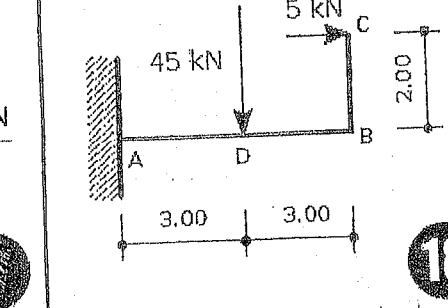
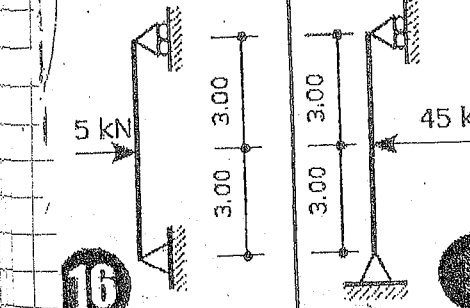
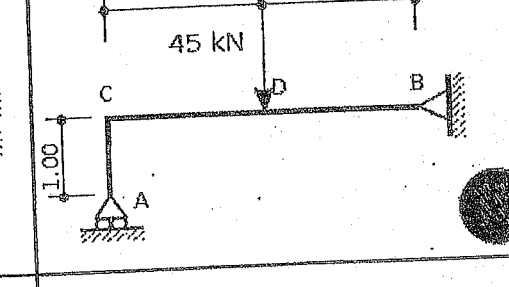
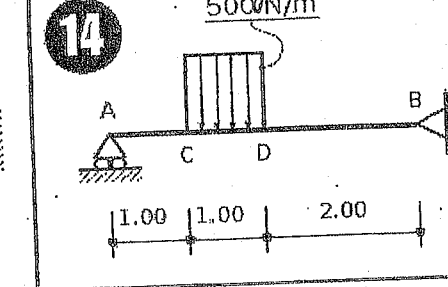
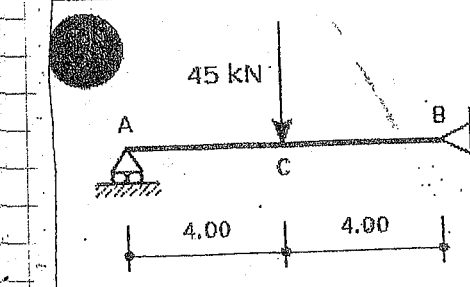
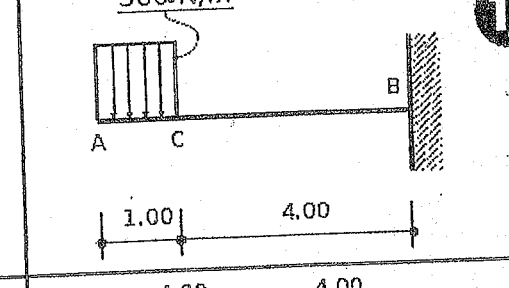
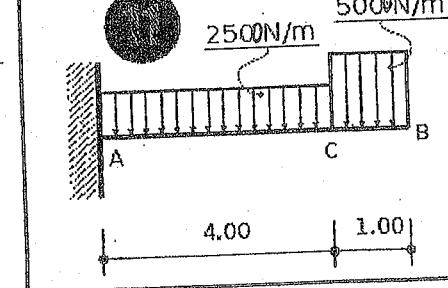
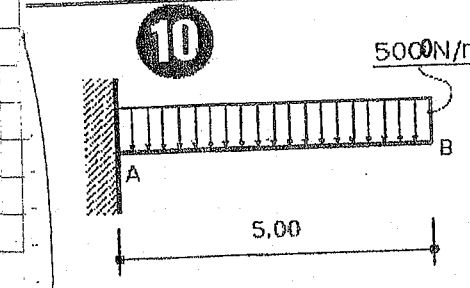
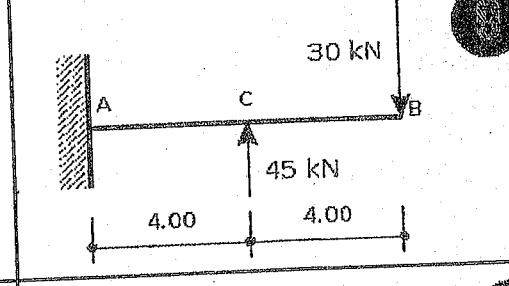
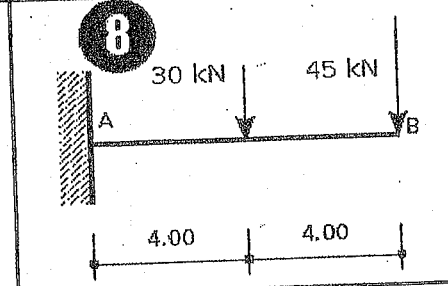
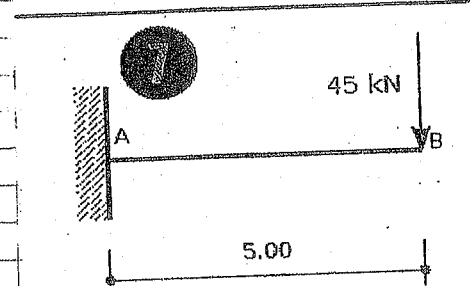
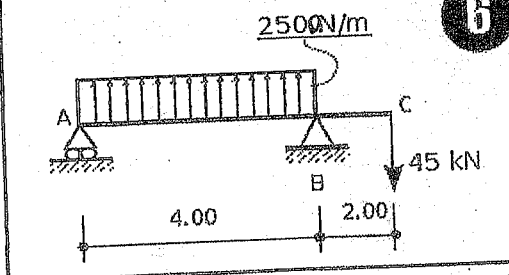
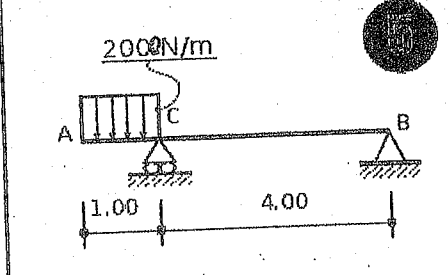
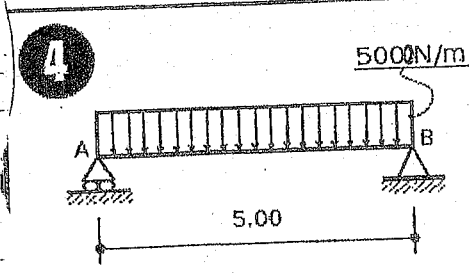
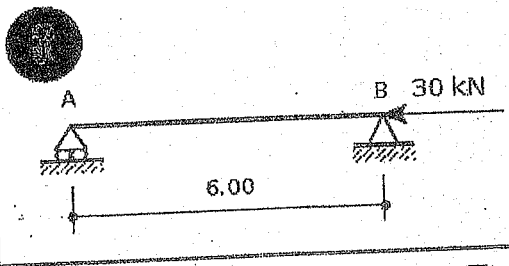
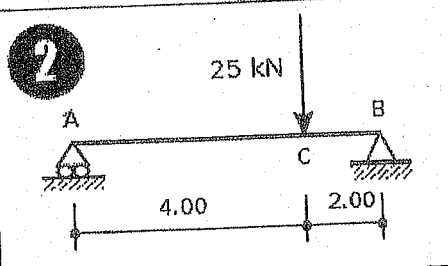
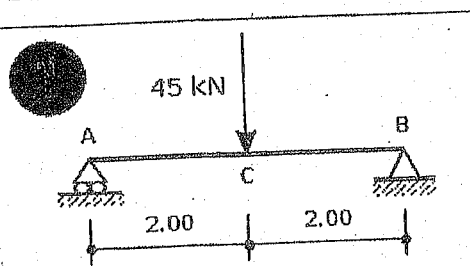


Corso di COSTRUZIONI

Esercizi su travi isostatiche

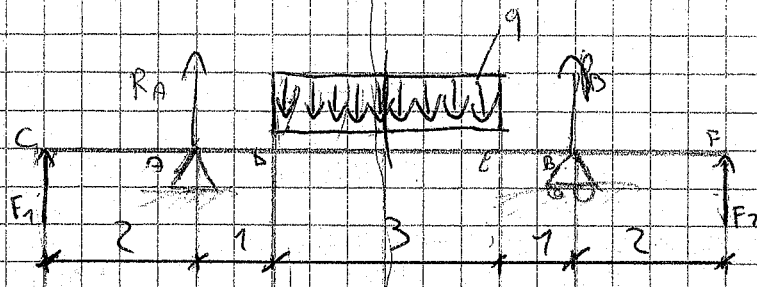
LIVRIZIA
GIUSEPPE TURB

Calcolare le reazioni vincolari e le caratteristiche di sollecitazione delle seguenti strutture isostatiche:



m. 7

$F_1 = 20 \text{ kN}$



$R_A = 24,60 \text{ kN}$ $q = 28 \text{ kN/m}$
 $R_B = 25,40 \text{ kN}$ $F_2 = 4 \text{ kN}$

~~$F_A = R_A = 24,60$~~

$T_C = F_1 = 20 \text{ kN}$

~~$T_D = 30$~~

$T_{F1} = 20$

$T_A = R_A + q \cdot l_1 - R_B = 20$

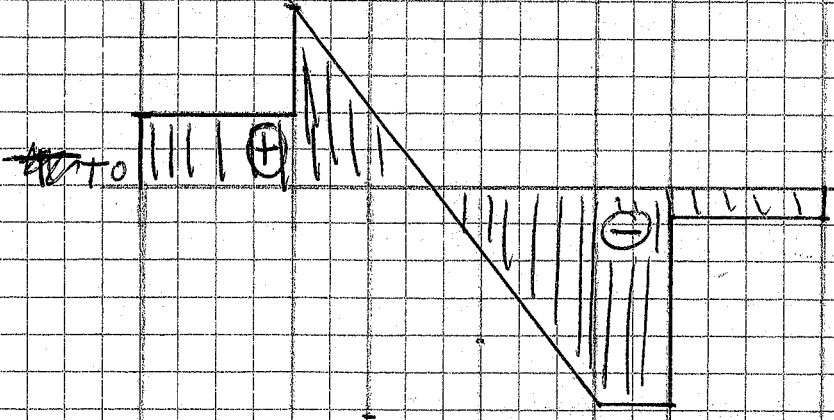
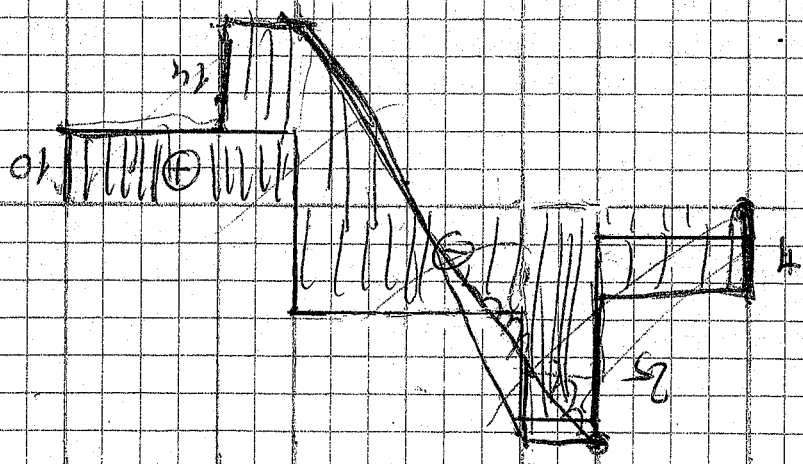
$T_D = q \cdot l - R_B - F_2 = 24,6$

$T_E = q - R_B - F_2 = 21,4$

$T_B = R_B - F_2 = 21,4$

$T_F = F_2 = 4$

20 kN



$M_{F1} = (-R_A \cdot 2) + (q \cdot l \cdot \frac{1}{2}) + (R_B \cdot 7) - F_2 \cdot 7$
 $= -29,2 + 243 - 177,8 - 36$

$M_{RA} = F_1 \cdot 2 = 20 \text{ kNm}$

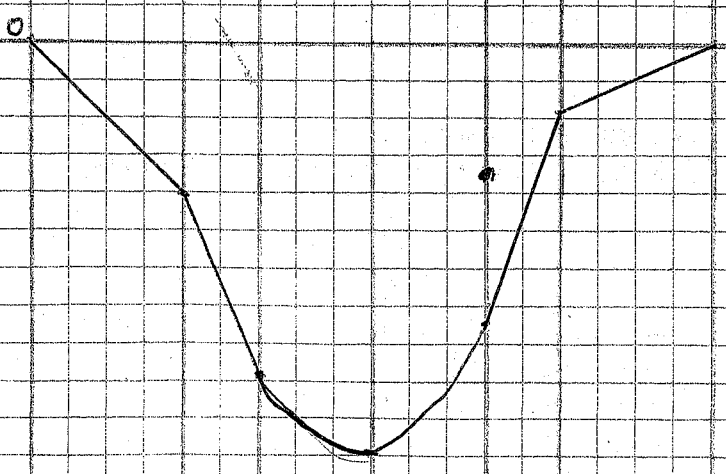
$M_D = F_1 \cdot 3 + R_A \cdot 7 = 44,6$

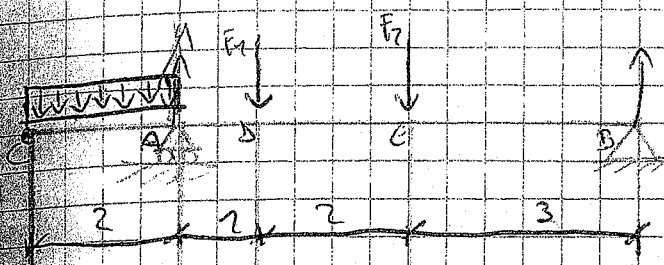
$M_q = F_1 \cdot 4,5 + R_A \cdot 2,5 = 37,1$

$M_E = (F_1 \cdot 6) - (R_A \cdot 4) + (q \cdot l \cdot \frac{1}{2}) = 37,1$

$M_{RB} = (F_1 \cdot 7) - (R_A \cdot 5) + (q \cdot l \cdot \frac{1}{2}) = 8$

M





$$q = 20 \text{ kN/m}$$

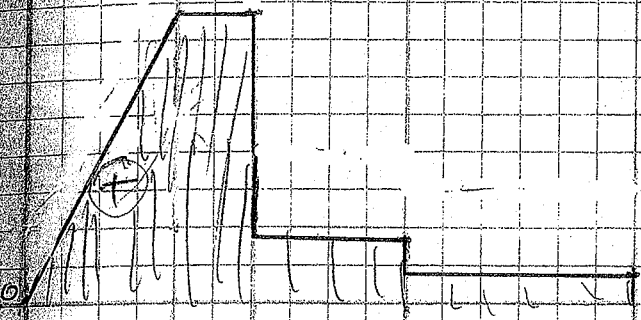
$$F_1 = 30 \text{ kN}$$

$$F_2 = 5 \text{ kN}$$

$$R_A = -50,83 \text{ kN}$$

$$R_B = -4,77 \text{ kN}$$

$$T_c = q \cdot l - R_A + F_1 + F_2 - R_B = 0$$



$$M_c = 0$$

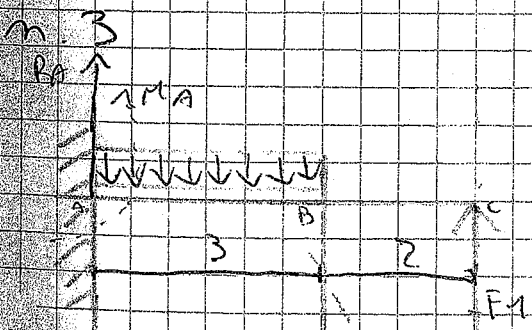
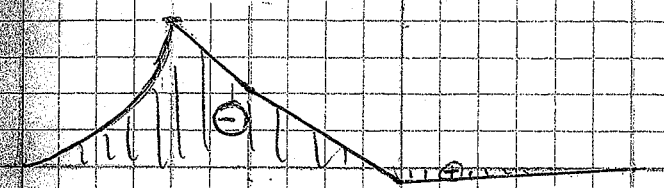
$$M_A = -(q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) = -20$$

$$M_D = (q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 1) + (R_A \cdot 1) = -70,83$$

$$M_E = (q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 3) + (R_A \cdot 3) - (F_1 \cdot 2) = 74$$

$$M_B = -(q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 6) + (R_A \cdot 6) - (F_1 \cdot 5) - F_2$$

$$= -140 + 304,98 - 150 - 5 = -0,02$$



$$q = 20 \text{ kN/m}$$

$$F_1 = 78 \text{ kN}$$

$$R_A = -48 \text{ kN}$$

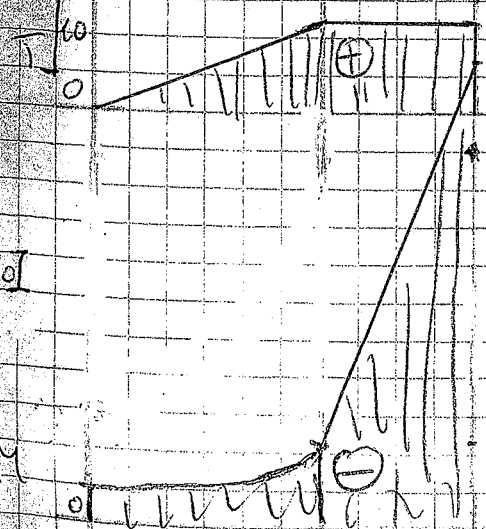
$$R_C = -30 \text{ kN}$$

$$M_A = -30 \text{ kN}$$

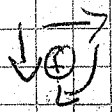
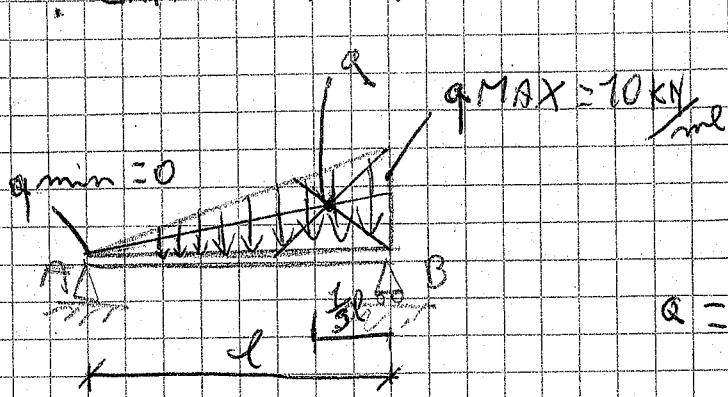
$$M_B = -(q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) - 30 \cdot 3 + (48 \cdot 3) = -36$$

$$M_C = -(q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 2) - (30 \cdot 5) + (48 \cdot 5) = 300$$

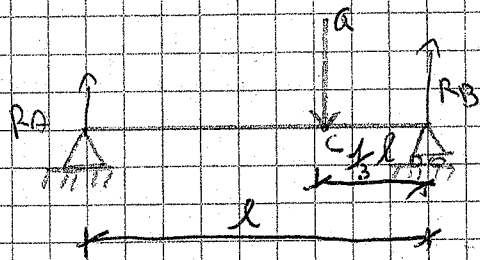
78



CARICHI TRIANGOLARI



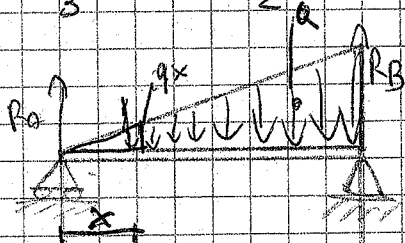
$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2} = \frac{10 \cdot l}{2}$$



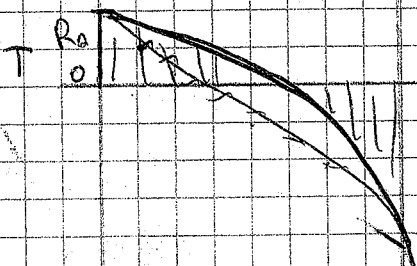
$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_y &= -R_A + Q - R_B \\ \sum M_B &= (R_B \cdot 0) - (Q \cdot \frac{l}{3}) + (R_A \cdot l) \end{aligned} \right.$$

$$R_B = \frac{2}{3} Q \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{2} \cdot l = \frac{q_{\max} \cdot l^2}{3}$$

$$R_A = \frac{1}{3} Q \cdot l = \frac{1}{3} \cdot \frac{q_{\max} \cdot l}{2} \cdot l = \frac{1}{6} q_{\max} \cdot l^2$$



x = valore a caso

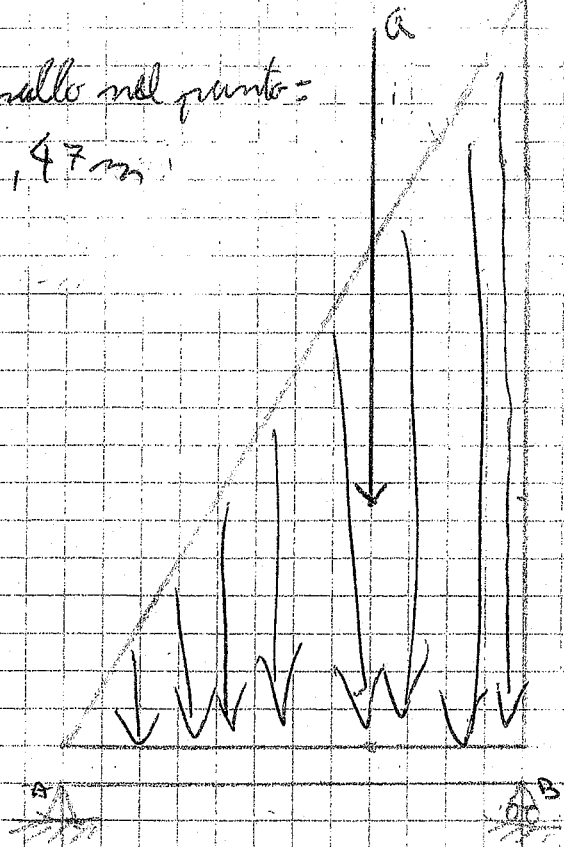


$$T_x = R_A - \left(\frac{q \cdot x \cdot x}{2} \right)$$

ES

il taglio è nullo nel punto =

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 3,47 \text{ m}$$



$$q_{max} = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$l = 6 \text{ m}$$

x = VARIA DI 0,50

$$Q = 30 \text{ KN}$$

$$Q = \frac{q_{max} \cdot l}{2} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$$

$$R_B = \frac{1}{3} q_{max} \cdot l = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 6 = 20$$

$$R_A = \frac{1}{3} q_{max} \cdot l = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 6 = 20$$

$$T(0,5) = R_A - \left(\frac{0,83 \cdot 0,5}{2} \right) = 19,8$$

$$T(1) = R_A - \left(\frac{1,67 \cdot 1}{2} \right) = 18,7$$

$$T(1,5) = R_A - \left(\frac{2,5 \cdot 1,5}{2} \right) = 17,5$$

$$T(2) = R_A - \left(\frac{3,33 \cdot 2}{2} \right) = 16,7$$

$$T(2,5) = R_A - \left(\frac{4,17 \cdot 2,5}{2} \right) = 15,8$$

$$T(3) = R_A - \left(\frac{5 \cdot 3}{2} \right) = 15$$

$$T(3,5) = R_A - \left(\frac{5,83 \cdot 3,5}{2} \right) = 14,2$$

$$T(4) = R_A - \left(\frac{6,67 \cdot 4}{2} \right) = 13,3$$

$$T(4,5) = R_A - \left(\frac{7,5 \cdot 4,5}{2} \right) = 12,5$$

$$T(5) = R_A - \left(\frac{8,33 \cdot 5}{2} \right) = 11,7$$

$$T(5,5) = R_A - \left(\frac{9,17 \cdot 5,5}{2} \right) = 10,8$$

$$q \cdot x \cdot 0,50 = q_{max} \cdot 6$$

$$q \cdot x = \frac{q_{max} \cdot 0,50}{6} = 0,83$$

$$q \cdot x_2 = \frac{q_{max} \cdot 1}{6} = 1,67$$

$$q \cdot x_3 = \frac{q_{max} \cdot 1,5}{6} = 2,5$$

$$q \cdot x_4 = \frac{q_{max} \cdot 2}{6} = 3,33$$

$$q_{max5} = \frac{q_{max} \cdot 2,5}{6} = 4,17$$

$$q_{max6} = \frac{q_{max} \cdot 3}{6} = 5$$

$$q_{max7} = \frac{q_{max} \cdot 3,5}{6} = 5,83$$

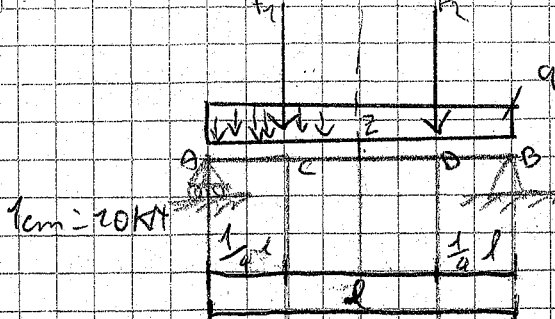
$$q_{max8} = \frac{q_{max} \cdot 4}{6} = 6,67$$

$$q_{max9} = \frac{q_{max} \cdot 4,5}{6} = 7,5$$

$$q_{max10} = \frac{q_{max} \cdot 5}{6} = 8,33$$

$$q_{max11} = \frac{q_{max} \cdot 5,5}{6} = 9,17$$

$$q_{max12} = \frac{q_{max} \cdot 6}{6} = 10$$



$$q = 20 \text{ KN/m}$$

$$F_1 = F_2 = 5 \text{ KN}$$

$$l = 4 \text{ m}$$

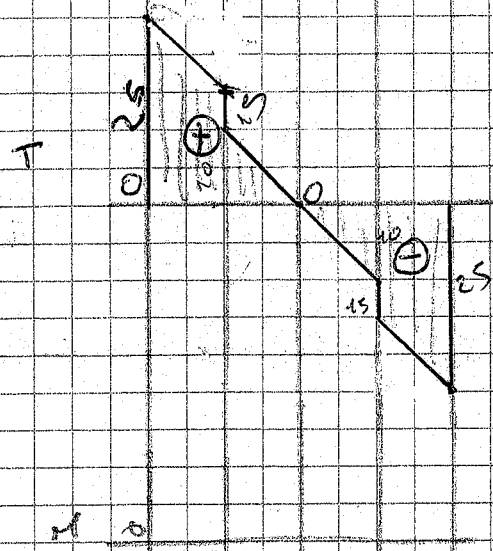
$$R_A = ? - 25 \text{ KN}$$

$$R_B = ? - 25 \text{ KN}$$

$$T = ?$$

$$M = ?$$

LO SFORZO NORMALE
E' NULLO



$$\begin{cases} \sum F_y = (q \cdot l) + F_1 + F_2 - R_A - R_B = 0 \\ \sum M_A = (q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) + (F_1 \cdot \frac{l}{4}) + (F_2 \cdot (l - \frac{l}{4})) - R_B \cdot l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = 40 + 5 + 5 - R_A + R_B = 0 \\ \sum M_A = 80 + 5 + 75 - R_B \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = -40 - 5 + 5 + R_B = 0 \\ R_B = \frac{-80 - 5 - 75}{4} = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = -40 - 5 - 75 + 25 = -25 \\ R_B = -25 \end{cases}$$

TAGLIO

$$T_{SA} = 0$$

$$T_A = R_A = 25 \text{ KN}$$

$$T_{SC} = R_A - 10 = 25 - 10 = 15 \text{ KN}$$

$$T_C = R_A - 10 - 5 = 25 - 15 = 10$$

$$T_{SE} = R_A - q \cdot \frac{l}{2} - F_1 = 25 - 20 - 5 = 0$$

$$M_A = 0$$

$$M_C = (R_A \cdot \frac{l}{4}) + (q \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8}) = 25 \cdot 1 + 20 \cdot 0.5 = 20$$

$$M_Z = (R_A \cdot \frac{l}{2}) + (q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}) + (F_1 \cdot \frac{l}{4}) = -30 + 20 + 5 = -25$$

$$M_B = (R_A \cdot l) + (q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) + (F_1 \cdot \frac{l}{2}) = -75 + 45 + 10 = -20$$

$$M_B = 0$$

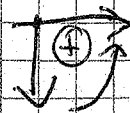
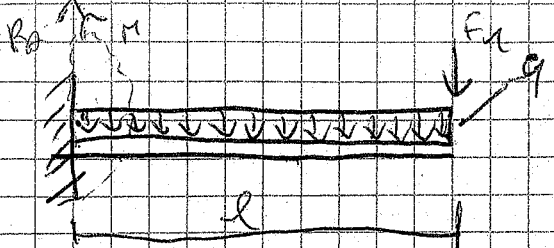
POS. T (KN) M (KNM)

A 0

B 0,5

C 7

D 7,5



$F_1 = 5 \text{ kN}$
 $q = 6 \text{ kN/m}$
 $l = 5 \text{ m}$
 $R_A = ?$

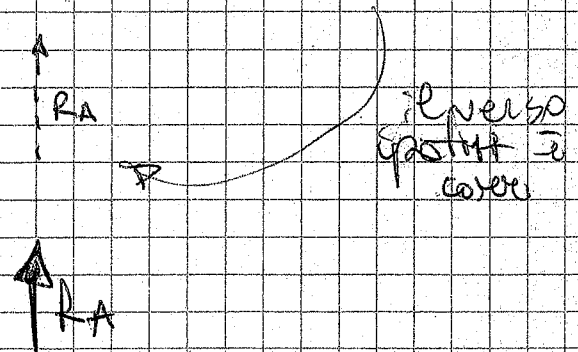
DIAGRAMMA $\left\{ \begin{array}{l} T \\ M \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = q \cdot l + F_1 - R_A = 0 \\ \sum M = (q \cdot l \cdot \frac{l}{2}) - F_1 \cdot l + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow +R_A = +q \cdot l + F_1 = +35$$

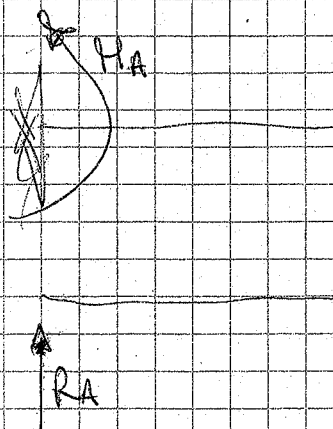
$$\begin{cases} R_A = 35 \text{ kN} \\ M = 75 + 25 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -R_A = -35 \\ M = 100 \end{cases}$$

$$R_A = 35 \text{ kN}$$

$$M = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

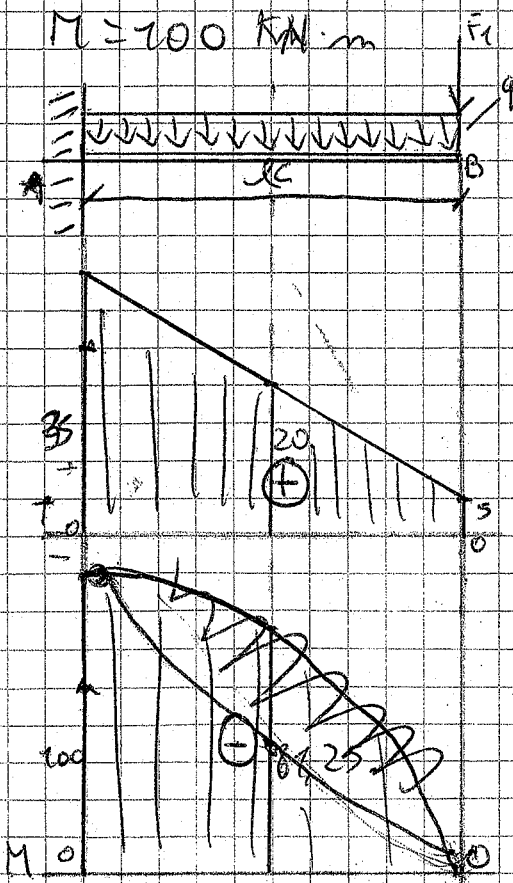


1 cm = 10 kN

$$T_{SC} = R_A - q \cdot \frac{l}{2} = 35 - 15 = 20 \text{ kN}$$

$$T_{SD} = R_A - q \cdot l = 35 - 30 = 5$$

$$T_D = R_A - (q \cdot l) - F_1 = 0$$



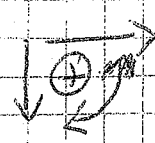
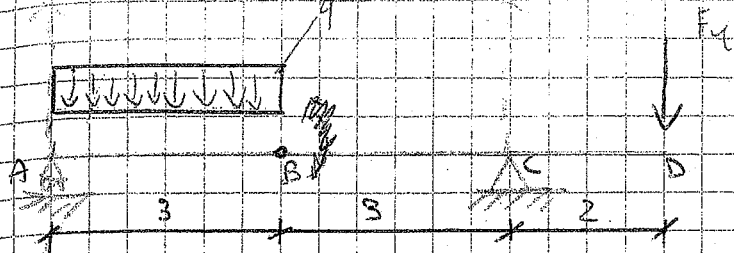
1 cm = 25 kN·m

$$M_A = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = 100 - (q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}) = 100 - 18.75 = 81.25$$

$$M_B = 0$$

83



$$q = 20 \text{ kN/m}$$

$$F_1 = 40 \text{ kN}$$

$$l = 8 \text{ m}$$

$$R_A = 37,67 \text{ kN}$$

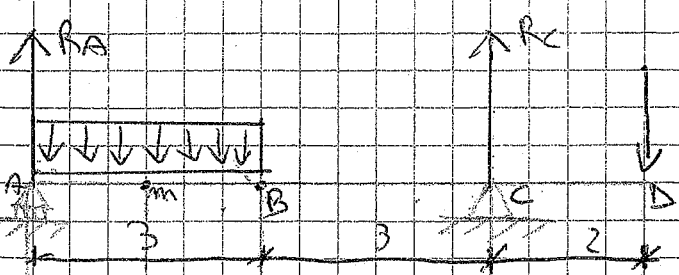
$$R_C = 68,33 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

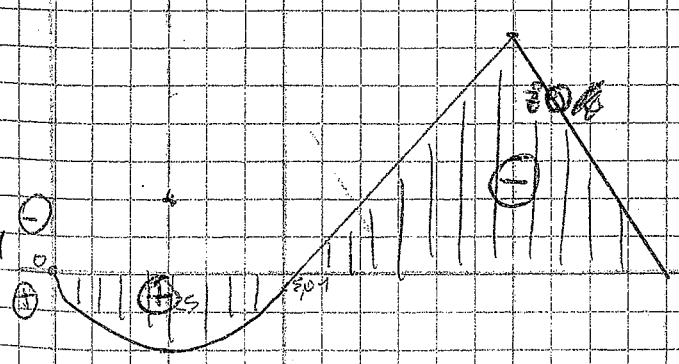
$$\begin{cases} \sum F_y = (q \cdot 3) + F_1 - R_A - R_C \\ \sum M = (q \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}) + F_1 \cdot l - R_A \cdot 0 - (R_C \cdot 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 + 40 - R_A - R_C \\ -R_C \cdot 6 = -90 - 320 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum F_y = 100 - R_A - R_C \\ -R_C \cdot 6 = -470 = 68,33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A = -100 + 68,33 = 31,67 \\ R_C = 68,33 \text{ kN} \end{cases} \quad \begin{cases} R_A = 37,67 \text{ kN} \\ R_C = 68,33 \text{ kN} \end{cases}$$



$$l_{cm} = 2,5 \text{ m}$$



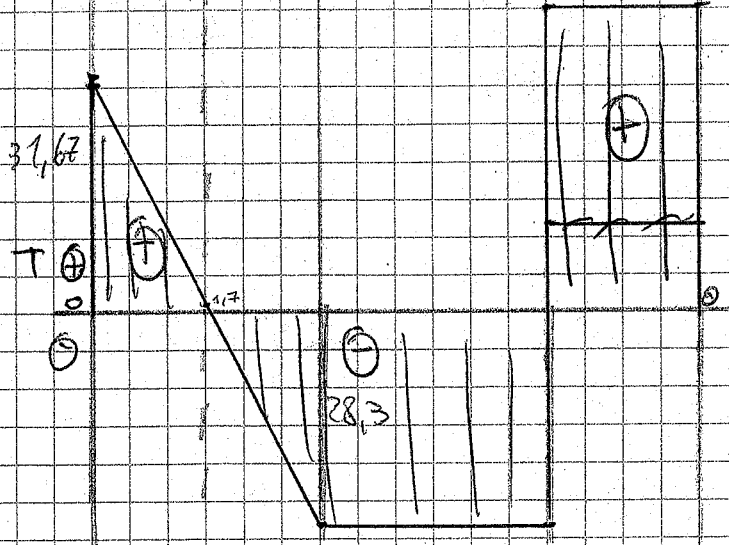
$$M_A = 0$$

$$M_m = (q \cdot 1,5 \cdot 0,75) - (R_A \cdot 1,5) = 22,5 - 47,5 = -25,0 \text{ kNm}$$

$$M_B = R_A \cdot 3 - (q \cdot 3 \cdot 1,5) = 95,07 - 90 = 5,07 \text{ kNm}$$

$$M_C = (R_A \cdot 6) - (q \cdot 3 \cdot 4,5) = 140,2 - 270 = -129,8 \text{ kNm}$$

$$M_D = (R_A \cdot 8) - (q \cdot 3 \cdot 6,5) + (R_C \cdot 2) = 253,4 - 390 + 136,6 = 0 \text{ kNm}$$



$$T_A = R_A = 31,67 \text{ kN}$$

$$T_{1,7} = R_A - (q \cdot 1,7) = 28,3 \text{ kN}$$

$$T_B = R_A - (q \cdot 3) = -28,3 \text{ kN}$$

$$T_C = R_A - (q \cdot 3) = -28,3 \text{ kN}$$

$$T_D = R_A - (q \cdot 3) + R_C = 40 \text{ kN}$$

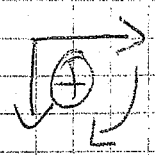
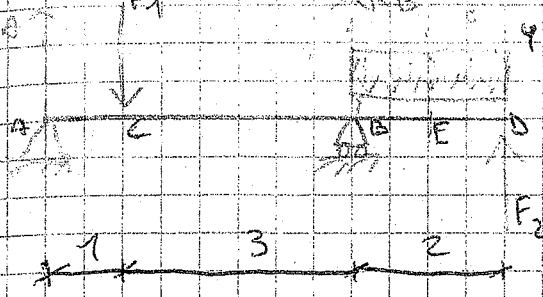
$$T_{D'} = R_A - (q \cdot 3) + R_C = 40 \text{ kN}$$

$$T_D = F_1$$

$$T=0 = R_A - q \cdot l_z = 0$$

$$l_z = \frac{R_A}{q}$$

$$\frac{31,67}{20} = 1,585 \text{ m}$$

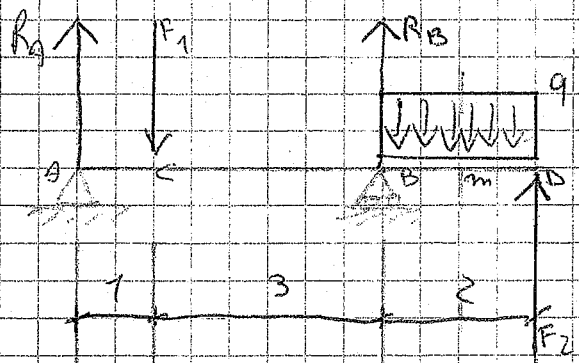


$q = 20 \text{ kN}$
 $F_1 = 20$
 $F_2 = 15$

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum F_y = -R_A + F_1 - R_B + (q \cdot l) - F_2 = 0 \\ \sum M_A = (R_B \cdot 4) + (F_1 \cdot 1) - (R_B \cdot 4) + (q \cdot 2 \cdot 5) - (F_2 \cdot 6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = -R_A + 20 - R_B + 20 - 15 = 0 \\ \sum M_A = 20 - R_B \cdot 4 + 100 - 90 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum F_y = -R_A + 25 - R_B = 0 \\ -R_B \cdot 4 = -30 = 7,5 \text{ kN} \end{cases}$$

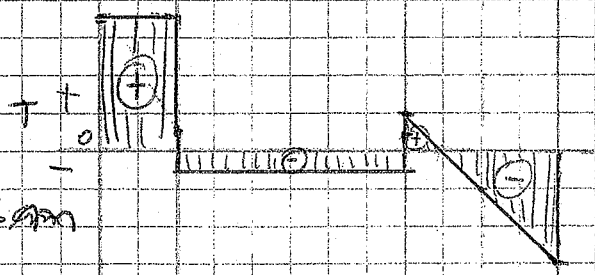
$$\begin{cases} -R_A = -25 + 7,5 = +17,5 \text{ kN} \\ R_B = 7,5 \text{ kN} \end{cases}$$



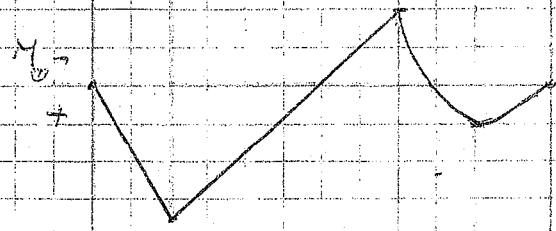
$$\begin{aligned} T_0 &= R_A - F_1 + R_B - (q \cdot l_2) = 0 \\ -10 \cdot l_2 &= -17,5 + 20 - 7,5 \Rightarrow \\ \Rightarrow l_2 &= \frac{-5}{-10} = -0,5 \end{aligned}$$

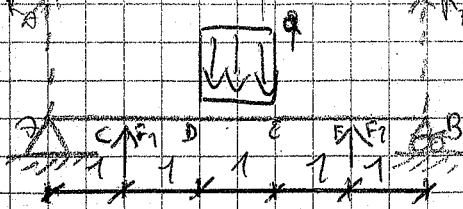
$$\begin{aligned} T_A &= R_A \\ T_{SC} &= R_A = 17,5 \text{ kN} \\ T_C &= R_A - F_1 = 17,5 - 20 = -2,5 \\ T_{SB} &= R_A - F_1 = 17,5 - 20 = -2,5 \text{ kN} \\ T_B &= R_A - F_1 + R_B = 17,5 - 20 + 7,5 = 5 \text{ kN} \\ T_m &= R_A - F_1 + R_B - (q \cdot 1) = 17,5 - 20 + 7,5 - 20 = -15 \text{ kN} \\ T_{SD} &= R_A - F_1 + R_B - (q \cdot 2) = 17,5 - 20 + 7,5 - 20 = -15 \text{ kN} \\ T_D &= 0 \end{aligned}$$

$T_m = 20 \text{ kN}$

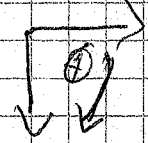


$T_0 = 4,5 \text{ kN}$





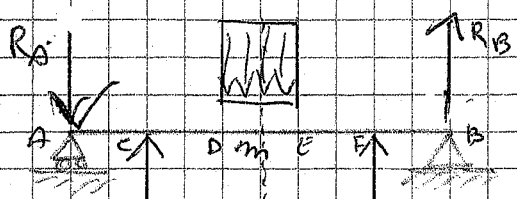
$F_1 = 5 \text{ kN}$
 $q = 20 \text{ kN}$
 $F_2 = 15 \text{ kN}$



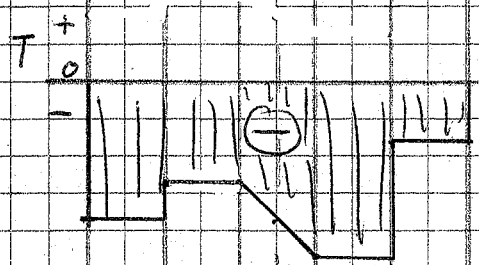
$$\begin{cases} \sum F_y = -R_A + F_1 + (q \cdot 1) - F_2 - R_B = 0 \\ \sum M_A = (R_B \cdot 5) - (F_1 \cdot 1) + (q \cdot 1 \cdot 2,5) - (F_2 \cdot 4) - (R_B \cdot 5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = -R_A - 5 + 20 - 15 - R_B = 0 \\ \sum M_A = -5 + 25 - 60 - R_B \cdot 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = -R_A - 10 - R_B = 0 \\ -R_B \cdot 5 = +40 \Rightarrow -8 \text{ kN} \end{cases}$$

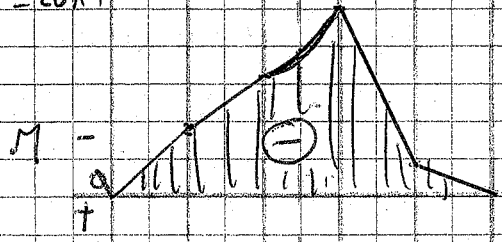
$$\begin{cases} +R_A = +10 + 8 = 18 \text{ kN} \\ R_B = -8 \text{ kN} \end{cases}$$



$T_{SA} = 0$
 $T_A = \dots R_A = 18 \text{ kN}$
 $T_{SC} = R_A = 18 \text{ kN}$
 $T_C = R_A - F_1 = 18 - 5 = 13 \text{ kN}$
 $T_{SD} = R_A - F_1 = 18 - 5 = 13 \text{ kN}$
 $T_D = R_A - F_1 = 18 - 5 = 13 \text{ kN}$
 $T_m = R_A - F_1 + 5 = 18 \text{ kN}$
 $T_E = R_A - F_1 + 20 = 23 \text{ kN}$
 $T_{SF} = R_A - F_1 + 20 = 23 \text{ kN}$
 $T_F = R_A - F_1 + 20 + F_2 = 28 \text{ kN}$

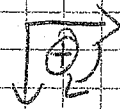
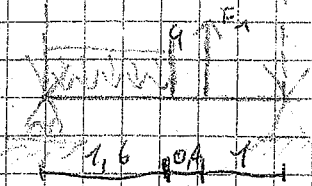


$q_{am} = 20 \text{ kN}$



$T_B = R_B$
 $T_{BB} = 0$
 $M_A = 0$
 $M_C = R_A \cdot 1 = -18 \text{ kNm}$
 $M_D = (R_A \cdot 2) + (F_1 \cdot 1) = 36 + 5 = -37$
 $M_m = (R_A \cdot 2,5) + (F_1 \cdot 1,5) - (q \cdot 1 \cdot 0,25) = -45 + 7,5 - 2,5 = -38,75$
 $M_E = (R_A \cdot 3) + (F_1 \cdot 2) - (q \cdot 1 \cdot 0,5) = -54 + 10 - 5 = -49 \text{ kNm}$

$$F_1 = 7,9 \text{ KN}$$



$$\sum F_y = R_A + (q \cdot 1,6) - F_1 + R_B$$

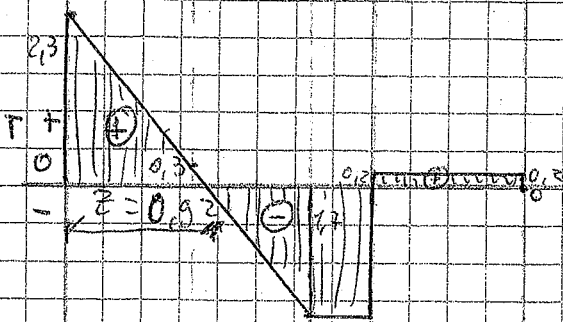
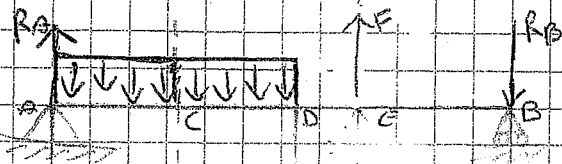
$$\sum M_A = (R_A \cdot 0) + (q \cdot 1,6 \cdot 0,8) - (F_1 \cdot 2) + (R_B \cdot 3)$$

$$\sum F_y = R_A + 4 - 7,9 + R_B$$

$$\underbrace{R_B \cdot 3}_{\substack{3 \\ \downarrow}} = \underbrace{-3,2 + 3,8}_{\substack{3 \\ \downarrow}} \Rightarrow R_B = 0,2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = -2,3 \\ R_B = 0,2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = -2,3 \\ R_B = 0,2 \end{array} \right.$$



$$T_A = R_A - q \cdot z = 0$$

$$z = \frac{-R_A}{-q} = z = \frac{2,3}{2,5} = 0,92$$

$$T_{A+} = 0$$

$$T_A = R_A = 2,3 \text{ KN}$$

$$T_{C-} = R_A - (q \cdot 0,8) = 2,3 - 2 = 0,3 \text{ KN}$$

$$T_D = R_A - (q \cdot 1,6) = 2,3 - 4 = -1,7 \text{ KN}$$

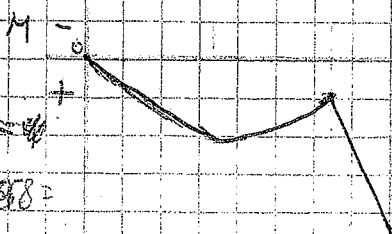
$$T_{C+} = R_A - (q \cdot 1,6) = 2,3 - 4 = -1,7 \text{ KN}$$

$$T_E = R_A - (q \cdot 1,6) + F_1 = 2,3 - 4 + 7,9 = 0,2 \text{ KN}$$

$$T_{B-} = 0,2 \text{ KN}$$

$$T_B = 0 \text{ KN}$$

$$T_{B+} = 0$$

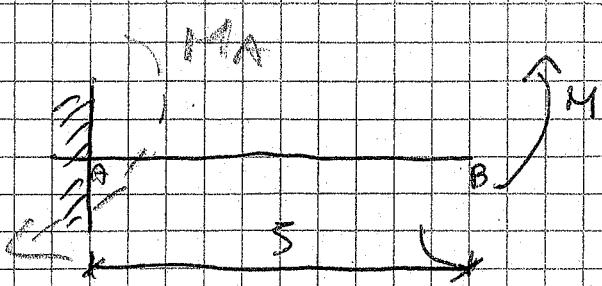


$$M_A = 0 \text{ KN}$$

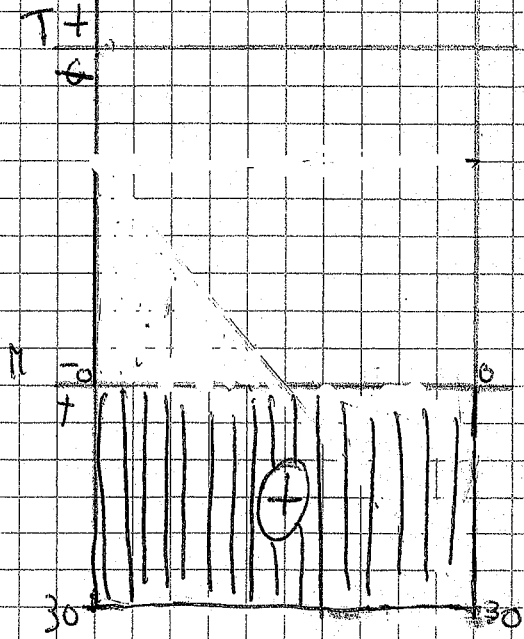
$$M_C = (R_A \cdot 0,8) - (q \cdot 0,8 \cdot 0,4) = 1,84 - 0,8 = 1,04 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

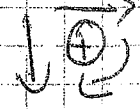
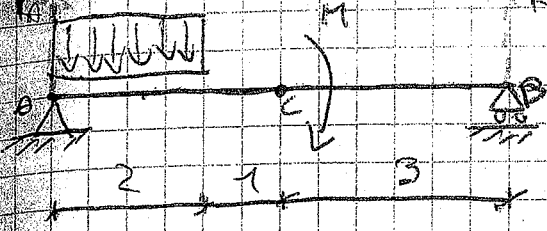
$$M_D = (R_A \cdot 1,6) - (q \cdot 1,6 \cdot 0,8) = 3,68 - 3,2 = 0,48 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_E = (R_A \cdot 2) - (q \cdot 0,8 \cdot 2,2) = 4,6 - 2,4 = 2,2 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



$AB = 5 \text{ m}$
 $M = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $R_A = 0 \text{ kN}$
 $M_A = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $D_T = ?$
 $D_M = ?$

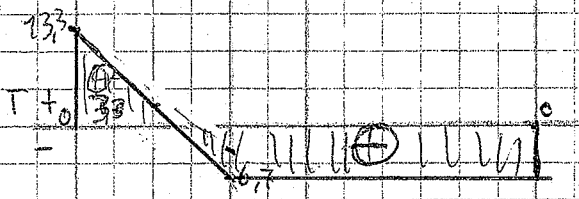
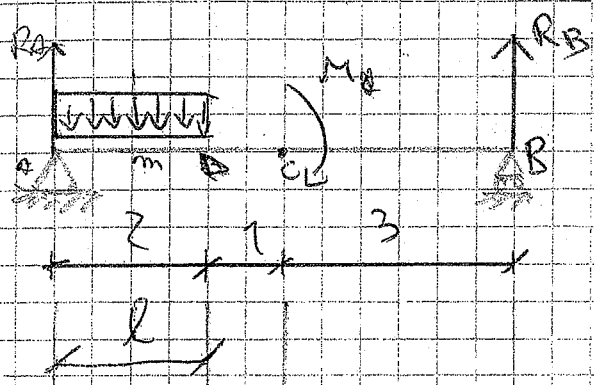




$q = 20 \text{ kN}$
 $M_c = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$

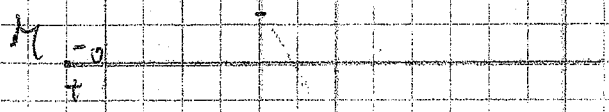
$$\begin{cases} \sum F_y = -R_A + q \cdot l - R_B = 0 \\ \sum M_A = q \cdot l + M_c - R_B \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = 20 - R_B = 0 \\ R_B = \frac{40}{6} = 6,7 \text{ kN} \end{cases} \quad \begin{cases} R_A = 20 - 6,7 = 13,3 \text{ kN} \\ R_B = 6,7 \text{ kN} \end{cases}$$



~~T~~

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= R_A - q \cdot \frac{l}{2} = 13,3 - 20 = 3,3 \text{ kN} \\ T_B &= R_A - 20 = 13,3 - 20 = -6,7 \text{ kN} \\ T_0 &= 0 \end{aligned}$$

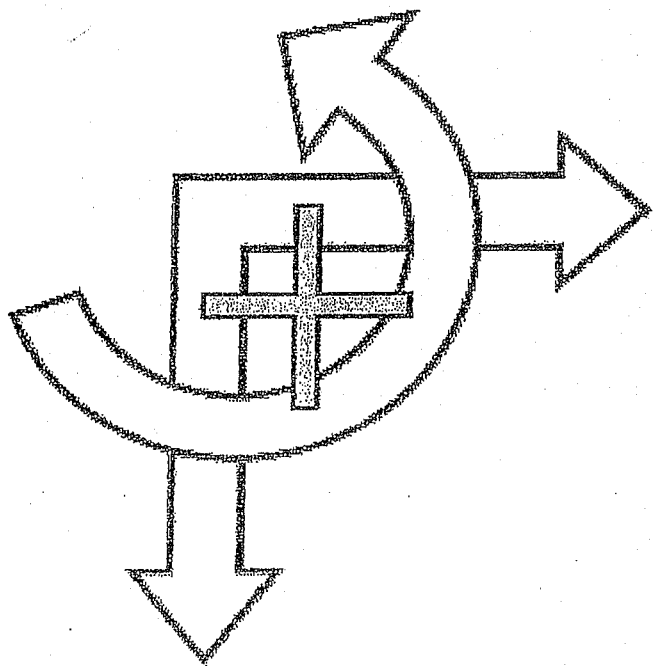


$$\begin{aligned} M_{\text{max}} &= \left(q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \right) + R_A = 18,3 \text{ kNm} \\ M_B &= - \left(q \cdot l \cdot \frac{l}{2} \right) + R_A = -6,7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

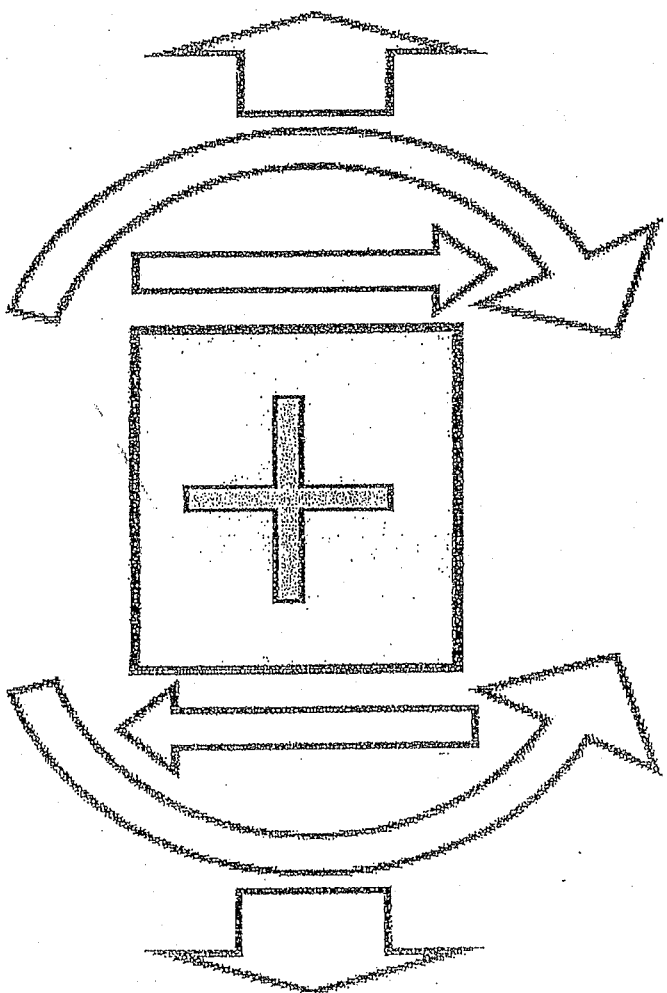
Studio delle Travature Isostatiche

4-1
4-2
4-3

Conversioni all'ingr.



Forze e
Momenti



Reazioni, Taglio e
Momento Normale

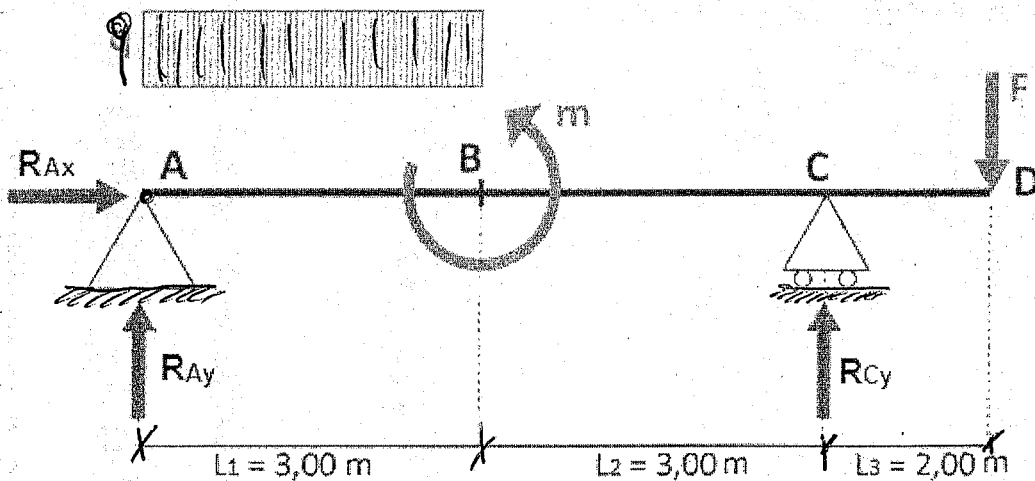
ESERCITAZIONE 3^B COSTRUZIONI MARZO 2017

Determinare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazioni N, T, M della trave riportata in figura e riportare tutto in opportuna scala (delle forze e delle lunghezze).

q	20 kN/m
M	30 kN m
F	40 kN

$$Q = qL_1 = 60 \text{ kN}$$

M = MOMENTO
APPIESTO



Il calcolo delle REAZIONI VINCOLARI avviene impostando 3 equazioni di equilibrio, le EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA:

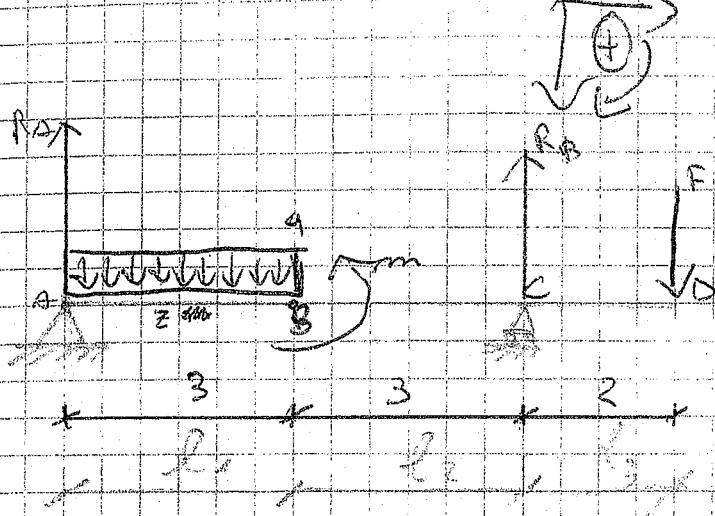
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Nel caso in esame, tenendo conto della seguente convenzione dei segni si ha:



$$\begin{cases} R_{A,x} = 0 \\ R_{A,y} - Q + R_{C,y} - F = 0 \\ Q \cdot \frac{L_1}{2} - m - R_{C,y} \cdot (L_1 + L_2) + F \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0 \end{cases}$$

L'equazione di equilibrio alla rotazione è stata effettuata rispetto al punto A



$$q = 20 \text{ kN/m}$$

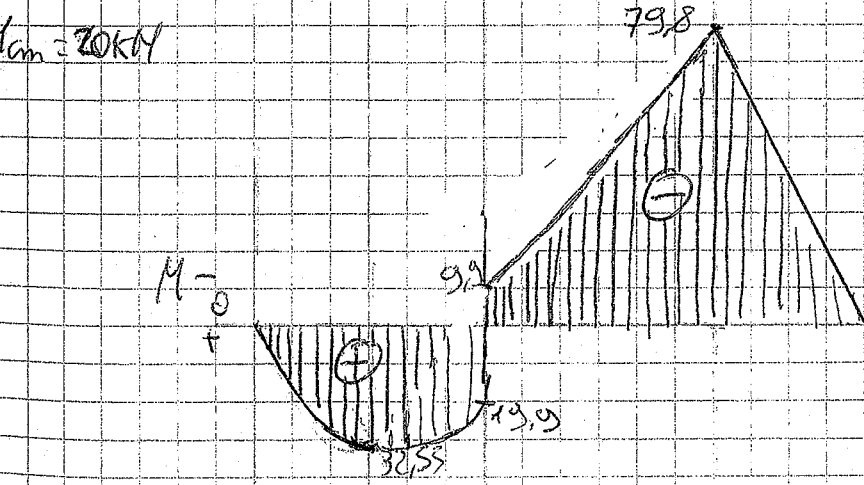
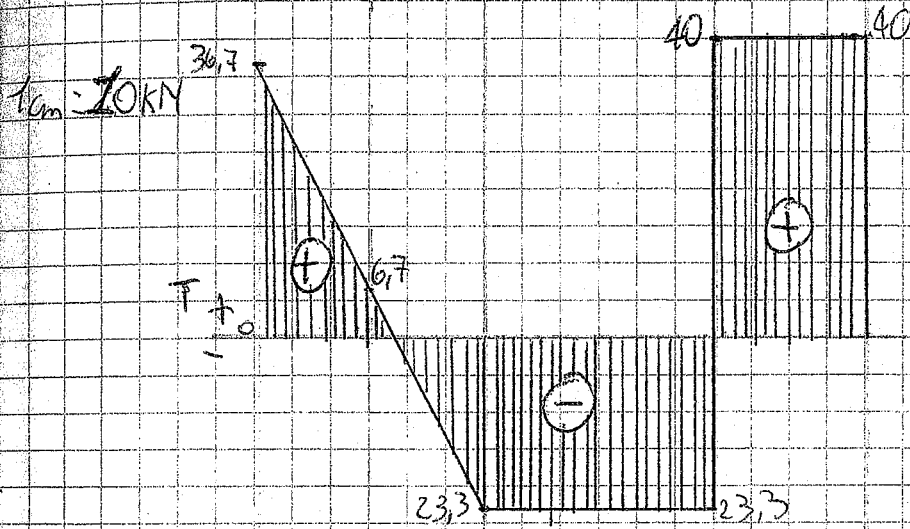
$$m = 30 \text{ kN/m}$$

$$F = 40 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = RA + (60) + RB + 40 \\ \sum M_A = 90 - 30 + (RB \cdot 6) + 320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = RA + RB + 100 \\ \frac{RB \cdot 6}{6} = \frac{380}{6} = 63,3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} RA = -100 + 63,3 = -36,7 \\ RB = -63,3 \end{cases}$$



$$TA = RA = -36,7 \text{ kN}$$

$$T_{3m} = RA - (q \cdot \frac{l_1}{2}) = 36,7 - 30 = 6,7 \text{ kN}$$

$$TB = RA - (q \cdot l_1) = 36,7 - 60 = -23,3 \text{ kN}$$

$$T_{3m} = RA - (q \cdot l_1) = 36,7 - 60 = -23,3 \text{ kN}$$

$$TC = RA - (q \cdot l_1) + RB = 36,7 - 60 + 63,3 = 40 \text{ kN}$$

$$T_{10m} = 40 \text{ kN}$$

$$TD = 0$$

$$MA = 0$$

$$M_{3m} = (RA \cdot 1,5) - (q \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{4}) = 55,05 - 22,25 = 32,8 \text{ kN}$$

$$M_{6m} = (RA \cdot 3) - (q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2}) - m = 110,7 - 90 - 30 = -9,3 \text{ kN}$$

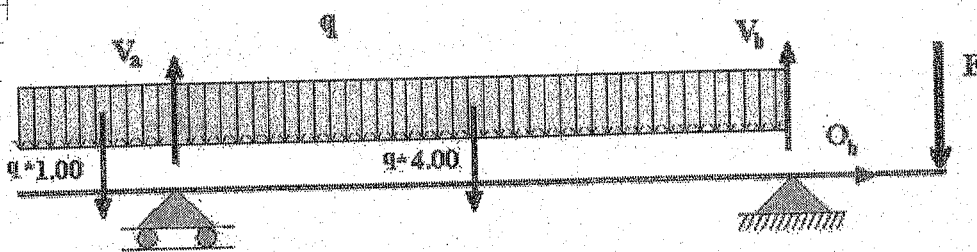
$$Mc = (RA \cdot 6) - (q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + 3) - m = 220,2 - 270 - 30 = -79,8 \text{ kN}$$

$$Md = (RA \cdot 8) - (q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + 5) - m + RB \cdot 2 = 293,6 - 390 - 30 + 126,6 = 0$$

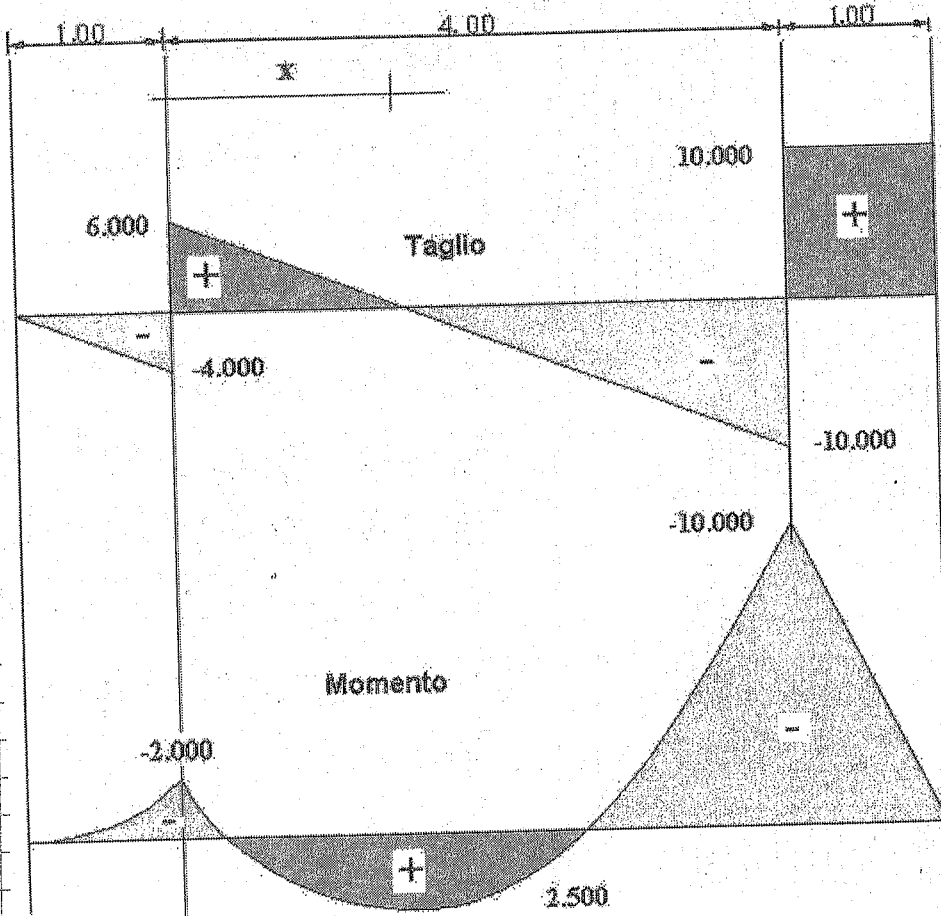
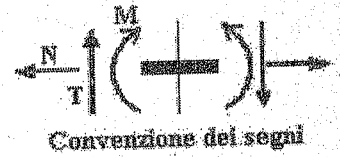
$$M_{10m} = (F \cdot 5) + (RB \cdot 3) - m = 200 - 189,9 - 30 = -19,9 \text{ kN}$$

94

Esercizio N. 7 - trave appoggiata con sbalzi



$q = 4.000 \text{ dN/m};$
 $F = 10.000 \text{ dN};$
 -100



$$\begin{cases} V_a = 10.000 \text{ Kg} \\ V_b = 20.000 \text{ Kg} \\ O_b = 0 \text{ Kg} \end{cases}$$

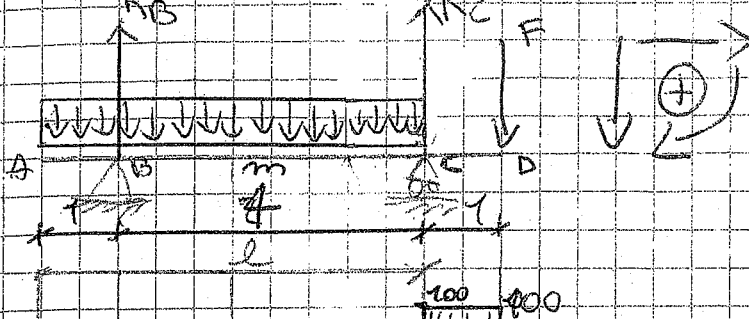
Calcoliamo i valori del taglio:

$$T_a^- = -q \cdot 1,00 = -4.000 \cdot 1,00 = -4.000 \text{ Kg}$$

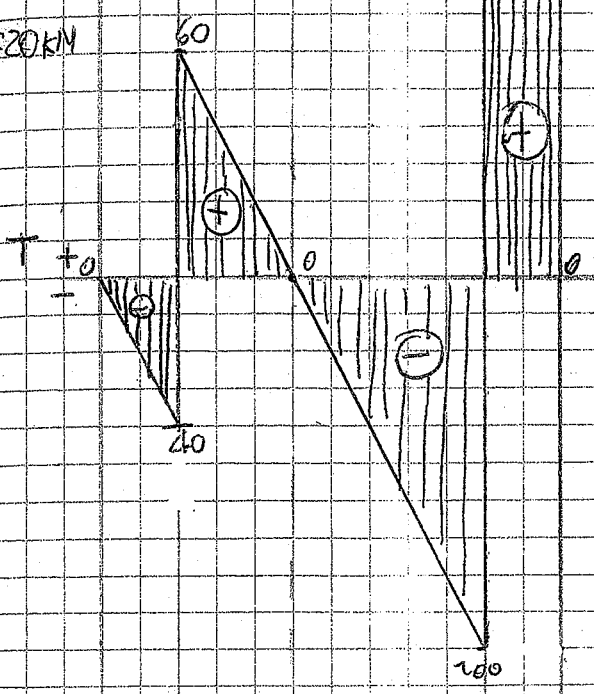
$$T_a^+ = -q \cdot 1,00 + V_a = -4.000 \cdot 1,00 + 10.000 = 6.000 \text{ Kg}$$

$$T_b^- = -q \cdot 1,00 + V_a - q \cdot 4,00 = -4.000 \cdot 1,00 + 10.000 - 4.000 \cdot 4,00 = -10.000 \text{ Kg}$$

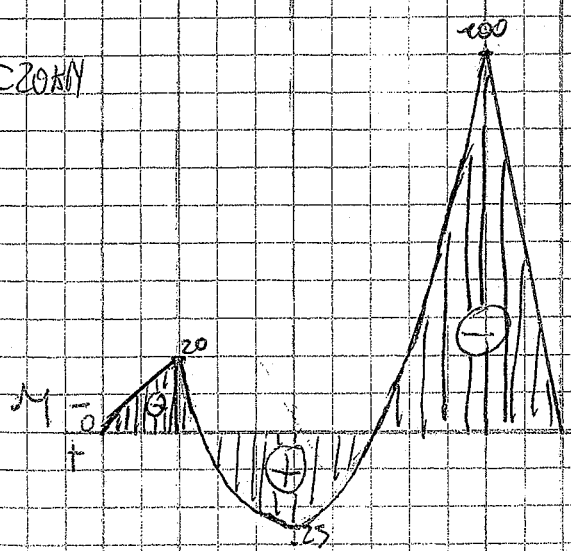
$$T_b^+ = +F = +10.000 \text{ Kg} \quad T_F = +F = +10.000 \text{ Kg}$$



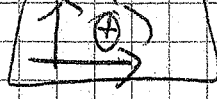
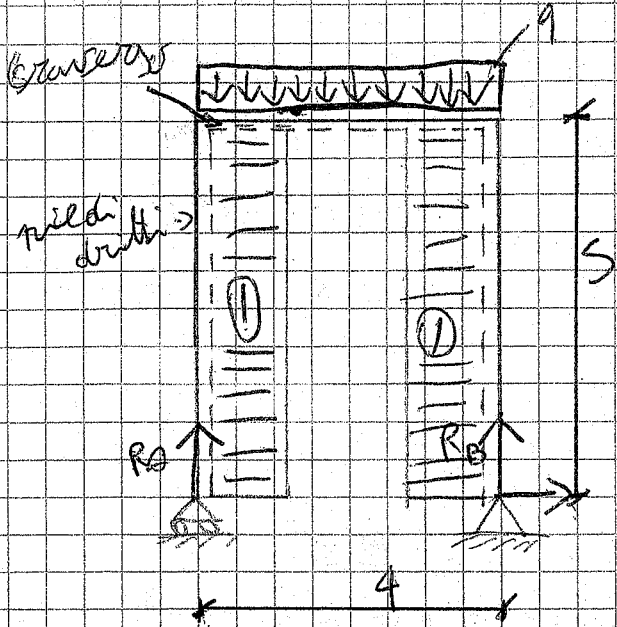
$q = 40 \text{ kN/m}$
 $F = 100 \text{ kN}$
 $R_B = -100 \text{ kN}$
 $R_C = -200 \text{ kN}$



$T_A = 0$
 $T_B = (q \cdot 7) = 40 \text{ kN}$
 $T_{2.5} = -(q \cdot 7) + R_B = 40 \text{ kN} + 100 = +160 \text{ kN}$
 $T_C = -(q \cdot 2.5) + R_B = -100 + 100 = 0 \text{ kN}$
 $T_C = (q \cdot 5) + R_B = 200 + 100 = -100 \text{ kN}$
 $T_C = (q \cdot 5) + R_B + R_C = 200 + 100 - 200 = 100$
 $T_F = (q \cdot 5) + R_B + R_C = 200 + 100 + 200 = 500 \text{ kN}$
 $T_F = (q \cdot 5) + R_B + R_C + F = 0$



$M_A = 0$
 $M_B = (q \cdot 7 \cdot 0.5) = -20 \text{ kNm}$
 $M_{2.5} = (q \cdot 2.5 \cdot 1.25) + (R_B \cdot 1.5) = -75 + 150 = 75$
 $M_C = (q \cdot 5 \cdot 2.5) + (R_B \cdot 4) = -625 + 400 = -225 \text{ kNm}$
 $M_D = -(q \cdot 5 \cdot 3.5) + (R_B \cdot 5) + (R_C \cdot 1) =$
 $= -875 + 500 + 200 = -175 \text{ kNm}$



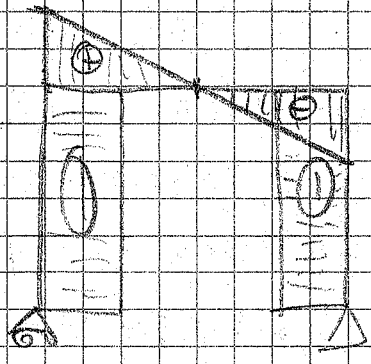
$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

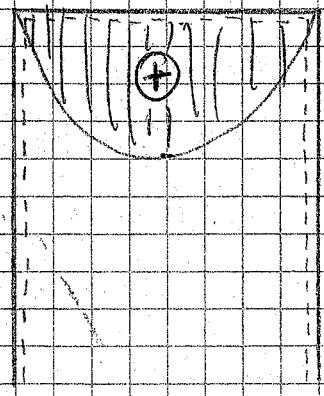
$$\begin{cases} \sum F_y = -40 + R_A + R_B \\ \sum M_A = (R_B \cdot 0) + (9 \cdot 4 \cdot 2) + (R_B \cdot 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = -40 + R_A + R_B \\ R_B \cdot 4 = - \frac{72}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = +40 - 20 = 20 \text{ kN} \\ R_B = -20 \text{ kN} \end{cases}$$

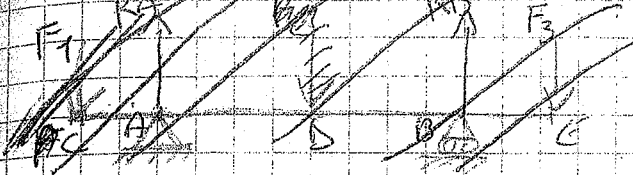


+



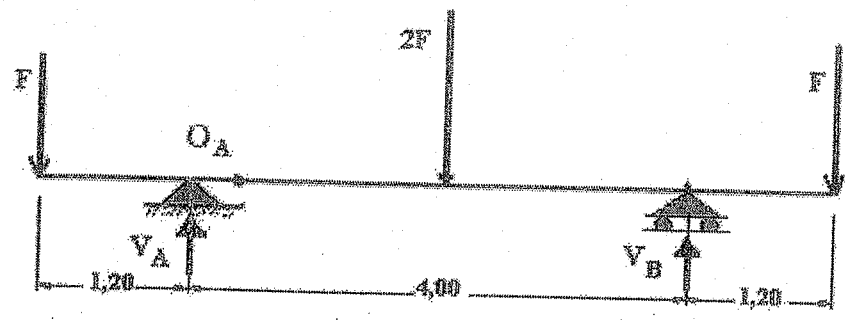
$$M_A = 0$$

$$M_C = R_A \cdot 2 + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 40 + 20 = 60$$

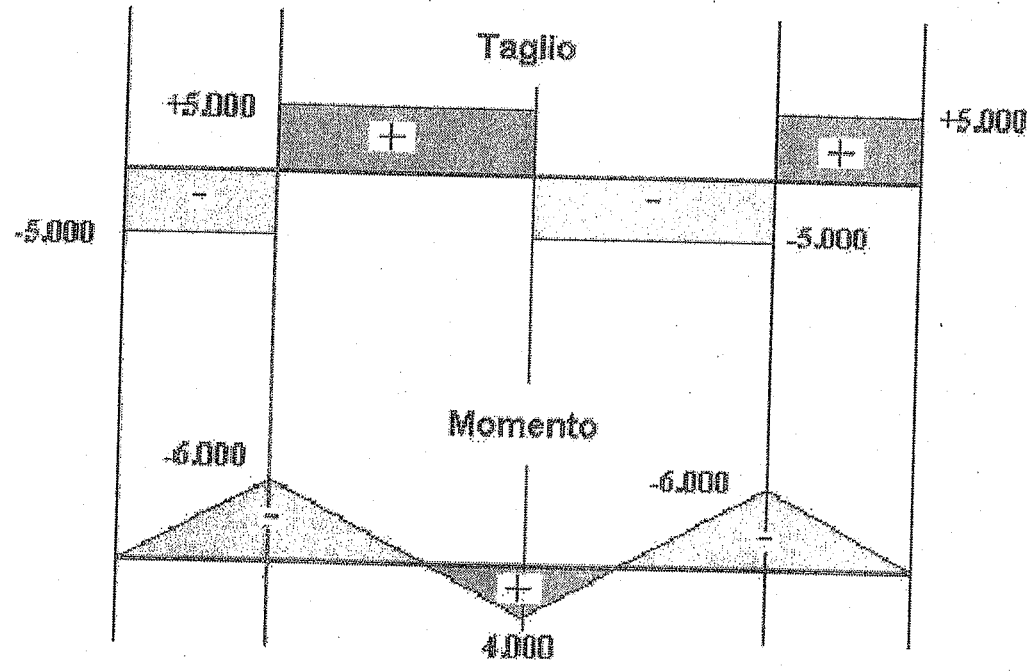


$F_1 = F_3 = 5 \text{ kN}$
 $R_A = 70 \text{ kN}$
 $R_B = 70 \text{ kN}$

Esercizio N. 8 - Trave appoggiata con due sbalzi

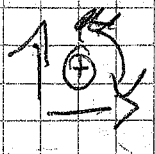
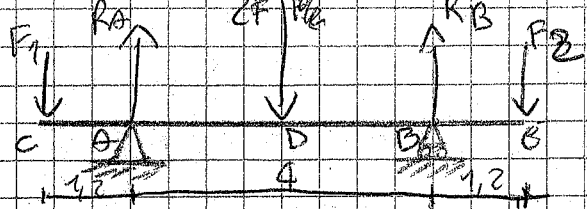


Convenzione dei segni



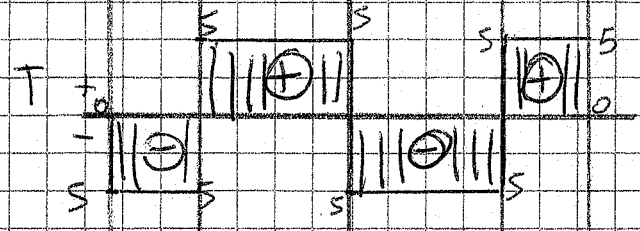
$F = 5.000 \text{ dN}$;
 $O_A = 0$;
 $V_A = 10.000 \text{ dN}$;
 $V_B = 10.000 \text{ dN}$

98



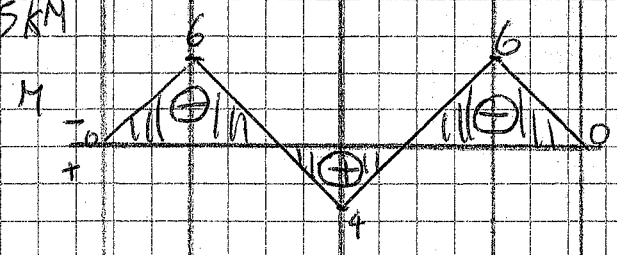
$F_1 = 5 \text{ KN}$
 $R_A = 20 \text{ KN}$
 $R_B = 20 \text{ KN}$

$1 \text{ cm} = 5 \text{ KN}$

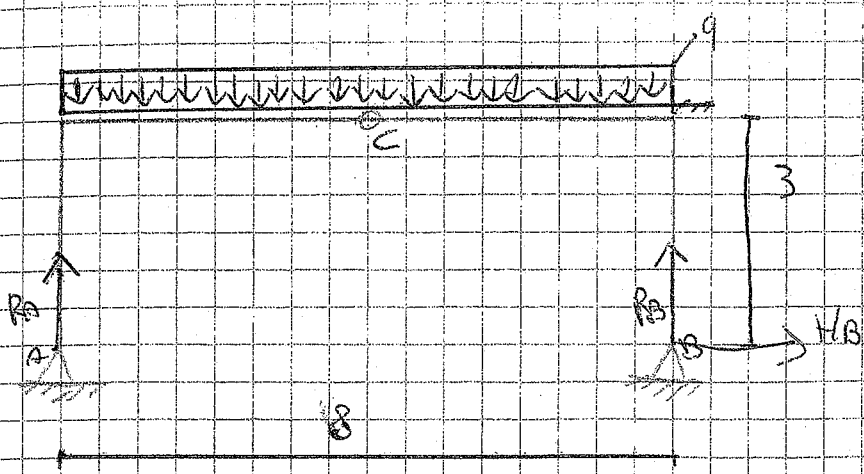


$T_C = F_1 = 5 \text{ KN}$
 $T_A = F_1 - R_A = 5 - 20 = -15 \text{ KN}$
 $T_D = 2F - R_A - F_1 = 10 - 20 - 5 = -15 \text{ KN}$
 $T_B = F_2 - R_B = 5 + 20 = 25 \text{ KN}$
 $T_E = 0$

$1 \text{ cm} = 5 \text{ KN}$



$M_A = 0$
 $M_D = F_1 \cdot 1.2 = 5 \cdot 1.2 = 6 \text{ KN}\cdot\text{m}$
 $M_B = (F_1 \cdot 3.2) + (R_A \cdot 2) = 16 + 40 = 56 \text{ KN}\cdot\text{m}$
 $M_E = (F_1 \cdot 5.2) + (R_A \cdot 4) - (2F \cdot 2) = 26 + 40 - 20 = 46 \text{ KN}\cdot\text{m}$
 $M_E = 0$

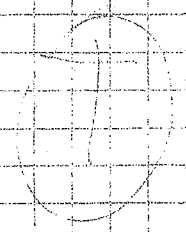
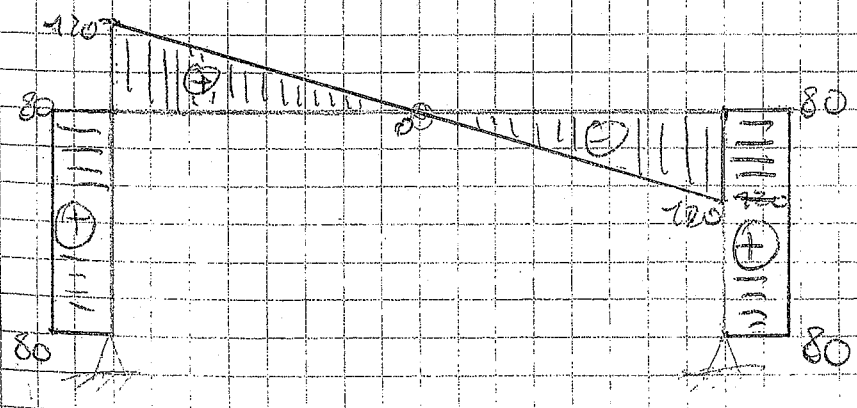
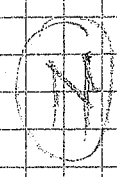
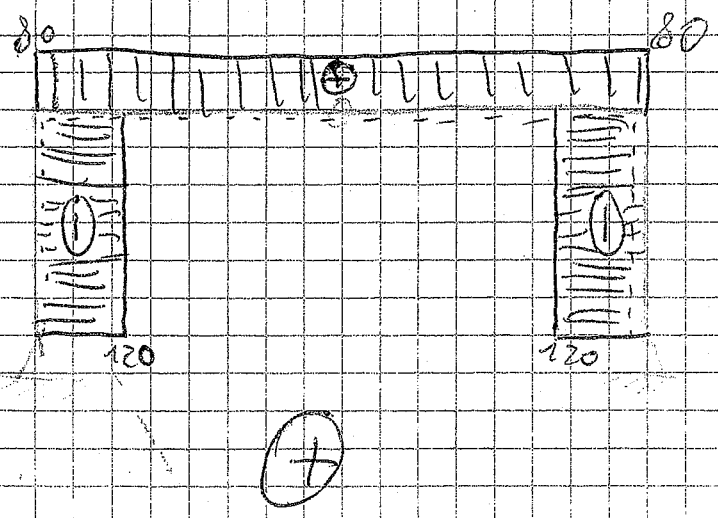
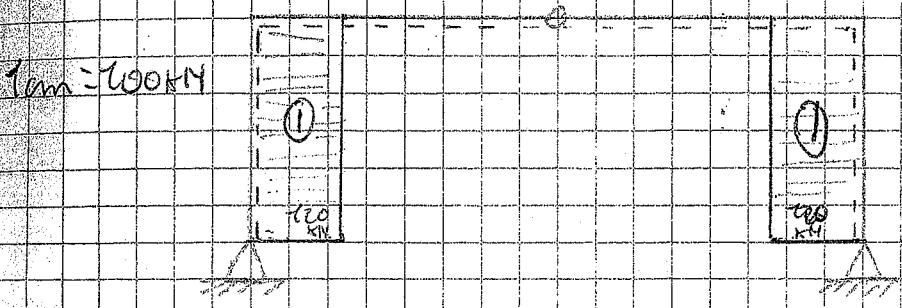


$q = 30 \text{ KN/m}$
 $R_A = 720 \text{ KN}$
 $R_B = 720 \text{ KN}$
 $H_B = H_A = -80 \text{ KN}$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

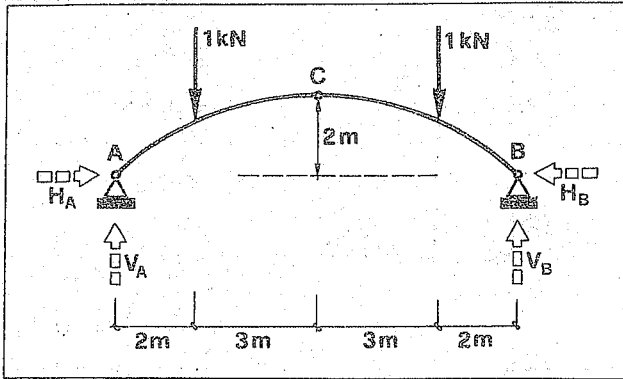
$$\sum M_C = -(30 \cdot 4 \cdot 2) + R_B(720 \cdot 4) + H_B \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow H_B \cdot 3 = 240 - 480 \Rightarrow H_B = -80 \text{ KN}$$

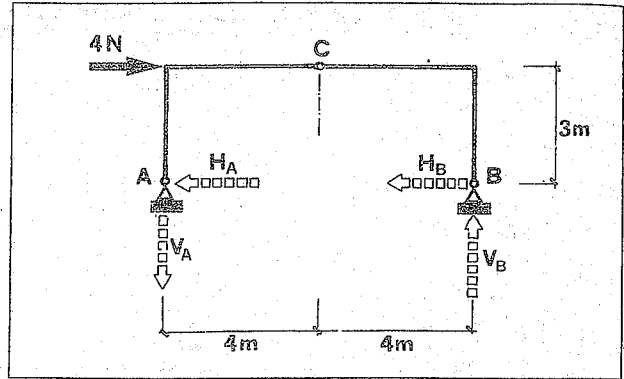


100

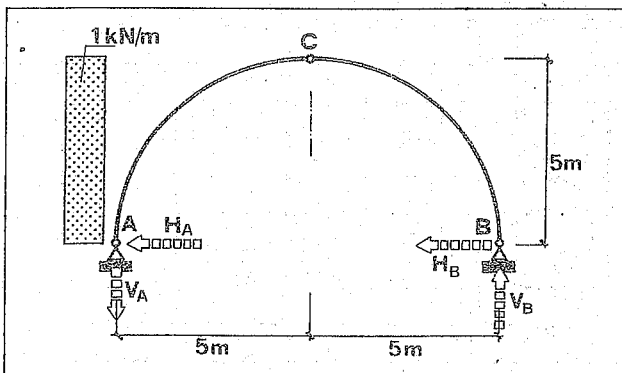
(H)



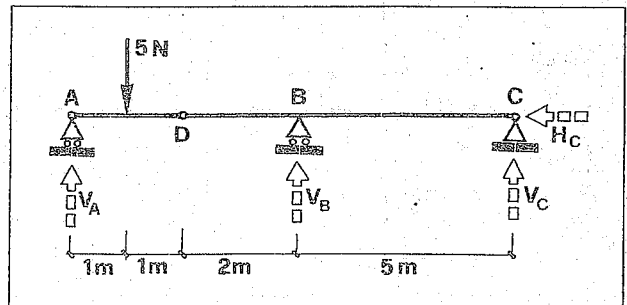
[Resp.: $V_A = V_B = 1 \text{ kN}$;
 $H_A = H_B = 1 \text{ kN}$]



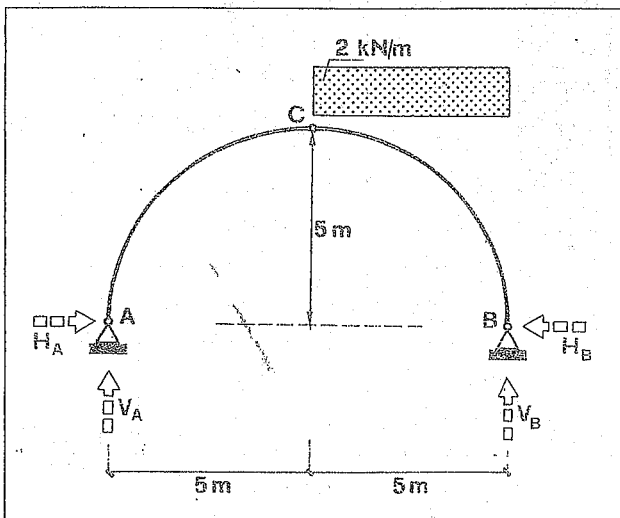
[Resp.: $H_A = H_B = 2 \text{ N}$;
 $V_A = V_B = 1,5 \text{ N}$]



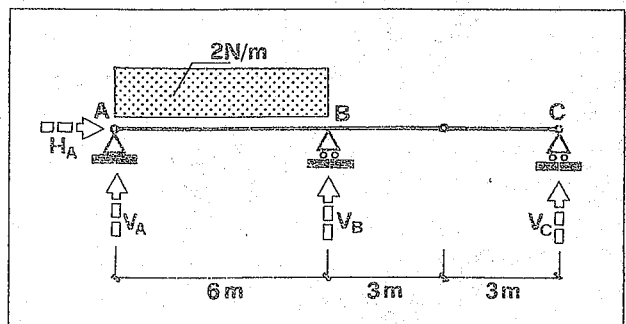
[Resp.: $H_A = 3,75 \text{ kN}$; $H_B = 1,25 \text{ kN}$;
 $V_A = 2,5 \text{ kN}$; $V_B = 2,5 \text{ kN}$]



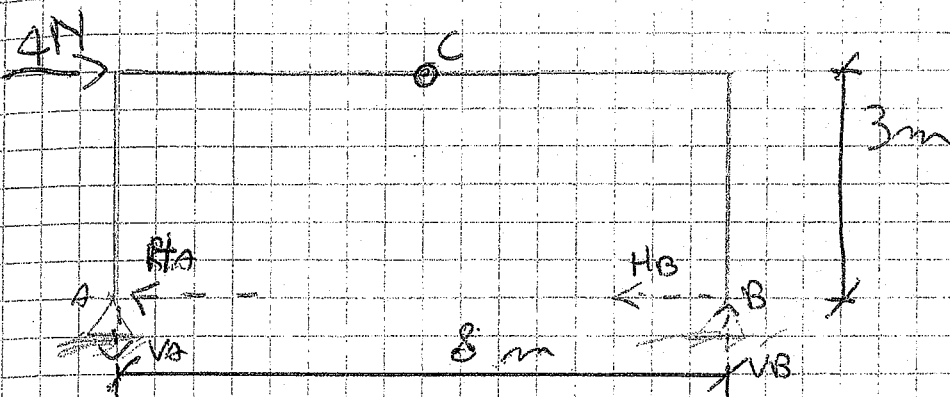
[Resp.: $V_A = 2,5 \text{ N}$; $V_B = 3,5 \text{ N}$;
 $V_C = -1 \text{ N}$; $H_C = 0$]



[Resp.: $H_A = H_B = 2,5 \text{ kN}$;
 $V_A = 2,5 \text{ kN}$; $V_B = 7,5 \text{ kN}$]



[Resp.: $H_A = 0$; $V_A = 6 \text{ N}$;
 $V_B = 6 \text{ N}$; $V_C = 0$]



↓ ⊕

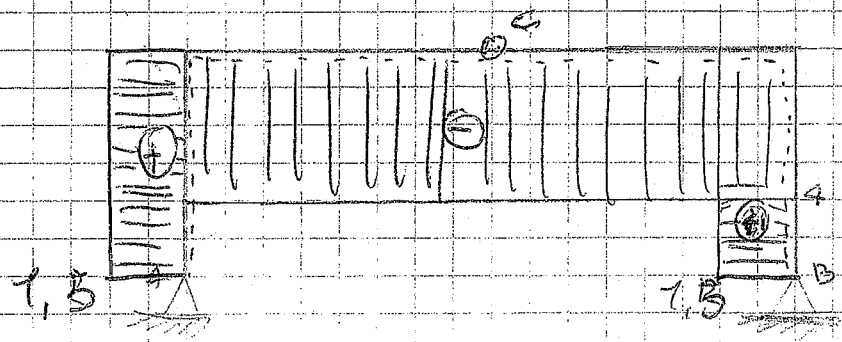
$$V_B = V_A = 1,5$$

$$H_A = H_B = 2$$

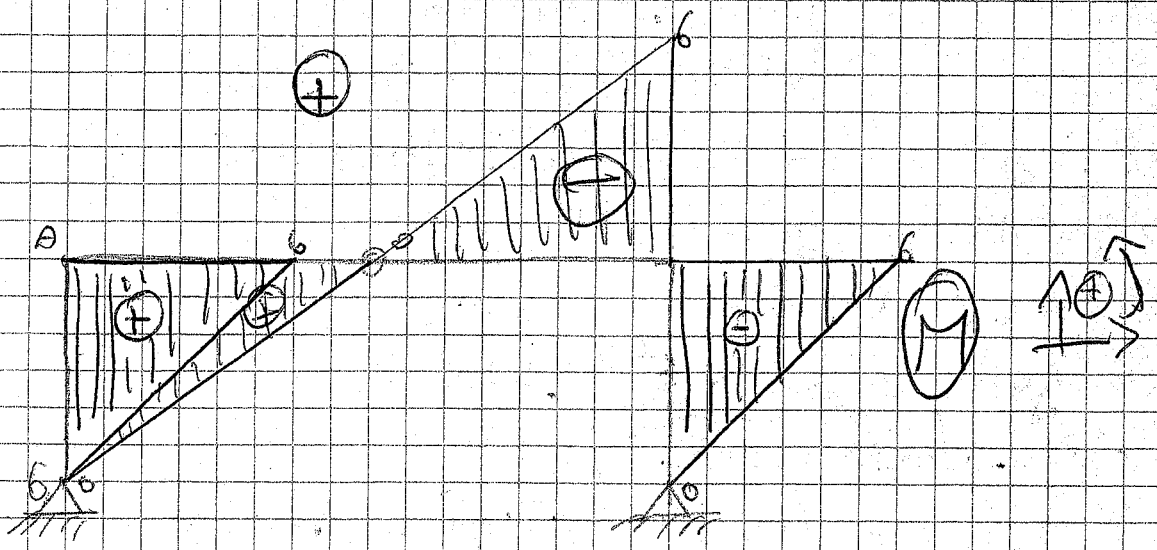
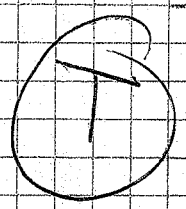
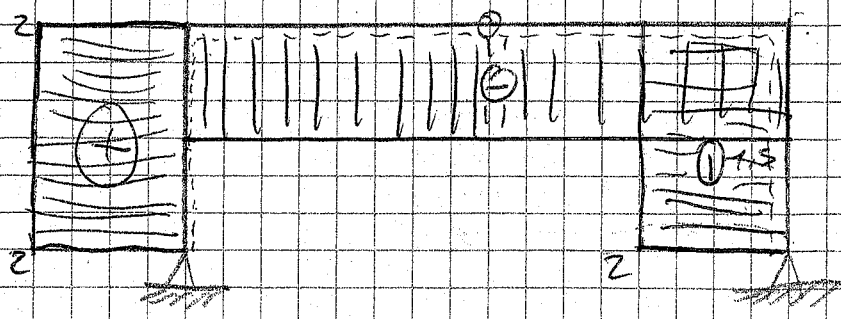
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 4 - H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A - V_B = 0 \\ \sum M_B = (4 \cdot 3) - V_B \cdot 8 = 0 \\ \sum M_C = (V_A \cdot 4) + (H_A \cdot 3) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 4 - H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = V_A - V_B = 0 \\ \sum M_B = V_B \cdot 8 = -4 \cdot 3 = -12 = -1,5 \\ \sum M_C = (V_A \cdot 4) + (H_A \cdot 3) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 4 - H_A - H_B = 0 \\ V_A = 1,5 \\ V_B = 1,5 \\ H_A \cdot 3 = -4 \cdot 3 = -12 = -2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} H_B = -4 + 2 = -2 \\ H_A = -2 \\ V_A = 1,5 \\ V_B = 1,5 \end{array} \right.$$

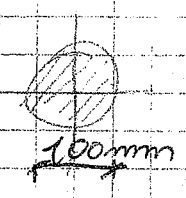
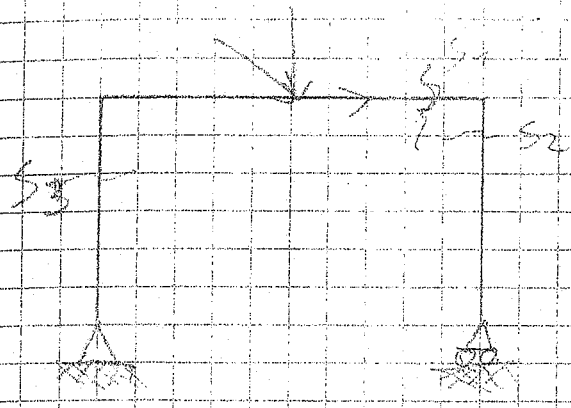


⊕



$$M_{AS} = (2 \cdot 3) \rightarrow 6$$

$$S_1 = S_2 = S_3$$



$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$N_e = +200 \text{ KN}$$

$$N_{p1} = -50 \text{ KN}$$

$$N_{p2} = -780 \text{ KN}$$

σ = tensione unitaria nel materiale di trazione

Compressione

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{200 \text{ KN}}{8000} = 0,025 \frac{\text{KN}}{\text{mm}^2} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{\text{limite}}$$

σ ammissibile

$\frac{\sigma}{\sigma_{\text{limite}}} \rightarrow$ coefficiente di sicurezza

$$205 \div 20$$

ACCIAIO grado di σ σ ammm N/mm^2

S 235 \rightarrow da 1,05 a 1,25 $235/1,05$

S 275 \rightarrow 1,05 a 1,25 $275/1,05$

S 355 \rightarrow 1,05 a 1,25 $355/1,05$

mm

LEGNO
 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ comp. I} \\ \sigma \text{ comp. II} \\ \sigma \text{ flessione} \\ \sigma \text{ trazione II} \end{array} \right.$

\downarrow
8 N/mm^2

2 N/mm^2

10 N/mm^2

9 N/mm^2

MURATURE

$\left\{ \begin{array}{l} \text{POROTON} \\ \text{TUFO} \end{array} \right.$

1,6 N/mm^2

0,8 N/mm^2

CLS

5,6 N/mm^2

\downarrow Tau

ACCIAIO = $\tau = 0,577 \cdot \sigma$ AMMISSIBILE

LEGNO = $\tau = 0,9$ N/mm^2

MURATURA = $\tau = 0,7$ N/mm^2

CLS = $\tau = 0,15$ N/mm^2

Calcolare la struttura di un pilastro in acciaio, legno muratura in tufo che deve resistere ad un carico di 2500 kN alla compressione. Si consideri inizialmente le seguenti ~~dimensioni~~ misure:

ACCIAIO = $107 \cdot 10^2$

2500 kN = 2500000 N

LEGNO = $107 \cdot 10^2$
 pilastre - tubi - $107 \cdot 1145$

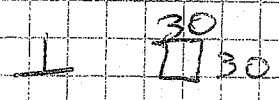
25000 kg \downarrow 105

$\sigma = \frac{F}{A}$

$$\sigma = \frac{2500 \cdot 1000}{100 \cdot 200} = \frac{2500000}{20000}$$

$g \cdot d = 1,25$
 $\frac{2500 \text{ N}}{\text{mm}^2} \cdot 0,25 \text{ mm} = 235 = 188$

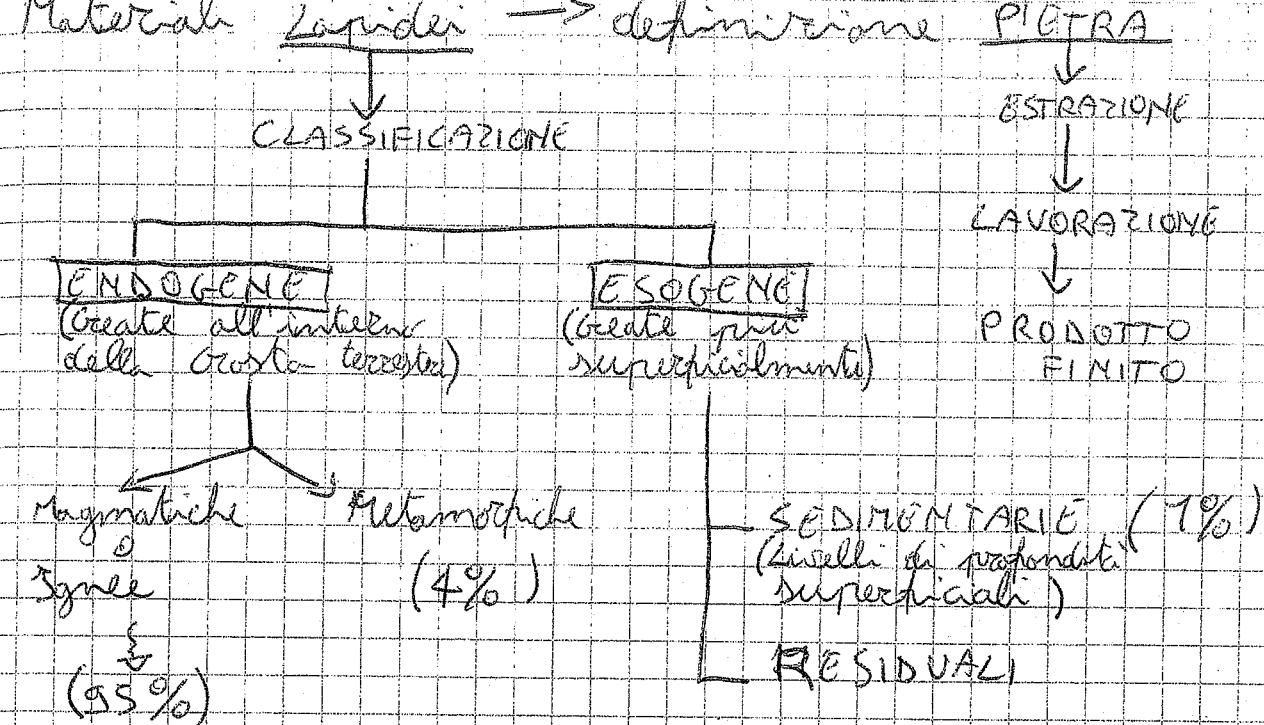
L 8 G N O



$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2500 \cdot 1000}{300 \cdot 300} = \frac{2500000}{90000} = 27,78 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{\text{mm}^2} = \frac{8 \text{ N}}{\text{mm}^2}$$

~~10~~



Classificazione dei materiali lapidei naturali
(rispetto origine geologica delle Rocce)

- ① ROCCE MAGMATICHE ② ROCCE SEDIMENTARIE ③ ROCCE METAMORFICHE

① ROCCE MAGMATICHE (Vulcaniche / Intrusive)

SOLIDIFICAZIONE DEL MAGMA
Processo di raffreddamento

ELEMENTI CHIMICI ⇒ * SILICE e ALLUMINIO (colorazione chiara)
* FERRO e MAGNESIO (colorazione scura)

INTRUSIVE (granito)

La solidificazione del magma avviene in un processo molto lento, la roccia presenta una struttura granulare (resistente, durevole, può essere levigata-lucidata)

EFFUSIVE
(basalto - basalto)

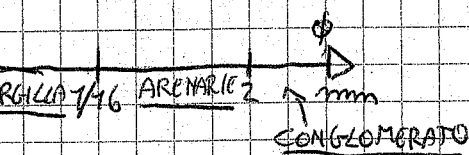
Solidificazione del magma avviene in superficie, processo più veloce, la struttura presenta cristalli (AMORFA)

② ROCCE SEDIMENTARIE = Rocce formate da agenti esterni dovuti a fenomeni di erosione.

Da cosa sono formate? → stratificazione e accumulamento di sedimenti di diversa natura.

②.1
CLASTICHE

↓
Costituita da frammenti di rocce (Clasti).



②.2
CHIMICA

↓
Formate grazie alla presenza o al deposito di sali e altri composti chimici che vengono trasportati dalle acque fluviali (gessi, carbonati, sulfuri)

②.3
ORGANOGENE

↓
Derivano dalla composizione e cementazione sul fondo marino di organismi

↓
CALCARI

③ ROCCE METAMORFICHE = La loro origine deriva da rocce magmatiche e sedimentarie che presentano una struttura trasformata a seguito di elevate pressioni e temperature (il tutto generato anche a seguito di esplosioni)

ELEVATE PRESSIONI

↓
Rocce "SCISTOSE" (formate da lastre)

↓
ARDESIA
GNÆIS

PRINCIPALI CARATTERISTICHE FISICHE

- 1) Peso di Volume
- 2) Volume e forma della Rocca
- 3) Imbibizione, Assorbimento, permeabilità
- 4) Durezza
- 5) Resistenza all'usura.

3

PESO DI VOLUME

S'intende il peso specifico apparente, cioè il peso in chilogrammi di un decimetro cubo di roccia non frantumata. Se poi confrontiamo il peso di volume di una roccia con il suo peso specifico, otteniamo un valore che indica il grado di compattezza.

$$\text{Grado di compattezza} = \frac{\text{Peso di volume}}{\text{Peso specifico}}$$

VOLUME E FORMA DELLA ROCCIA

- Per volume s'intende il massimo volume dei blocchi estraibili dal giacimento.
- La forma della roccia è determinata dalla configurazione tettonica, dalla giacitura e dal metodo di estrazione della roccia stessa.

IMBIBIZIONE - ASSORBIMENTO - PERMEABILITÀ

Qualsiasi roccia immersa nell'acqua se ne imbeve in misura più o meno rilevante. Questa caratteristica, detta imbibizione, in relazione al grado di porosità della roccia è può essere misurata dal coefficiente di imbibizione.

~~ASSORBIMENTO~~

• L'assorbimento è la proprietà che hanno le rocce di assorbire l'acqua per capillarità; quando siamo in contatto con l'acqua oppure su un terreno molto umido. Que-

• durissime, quelle segolate con seghe fisse e rubore di diamante.

RESISTENZA ALL'USURA

Dalla durezza del materiale dipende anche la resistenza all'usura o logoramento, proprietà ~~molto~~ particolarmente importante per i materiali destinati a lastriche stradali e pavimentazione.

Per determinare la resistenza all'usura si possono eseguire diverse prove:

- 1) Prova per attrito radente
- 2) Prova al getto di sabbia
- 3) Prova di rotolamento

RESISTENZA ALLE SOLLECITAZIONI

La resistenza alle sollecitazioni è uno dei requisiti essenziali per le pietre impiegate nelle costruzioni.

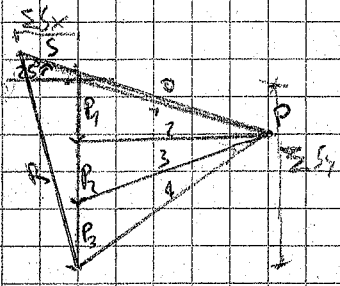
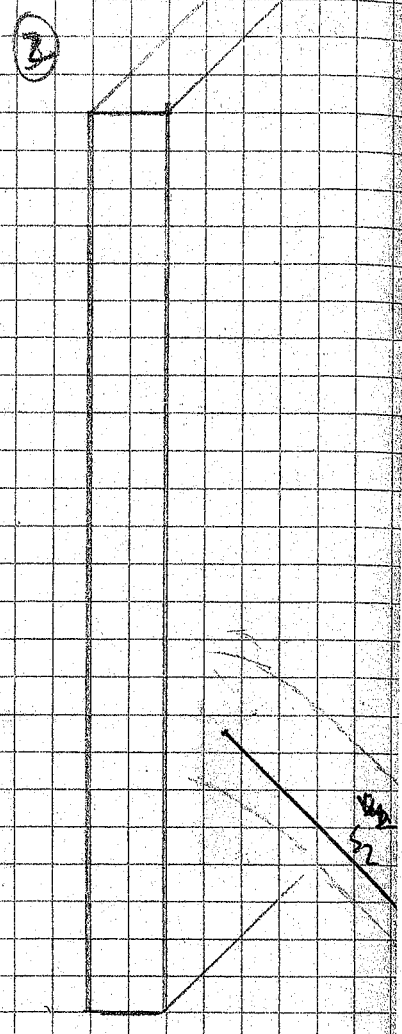
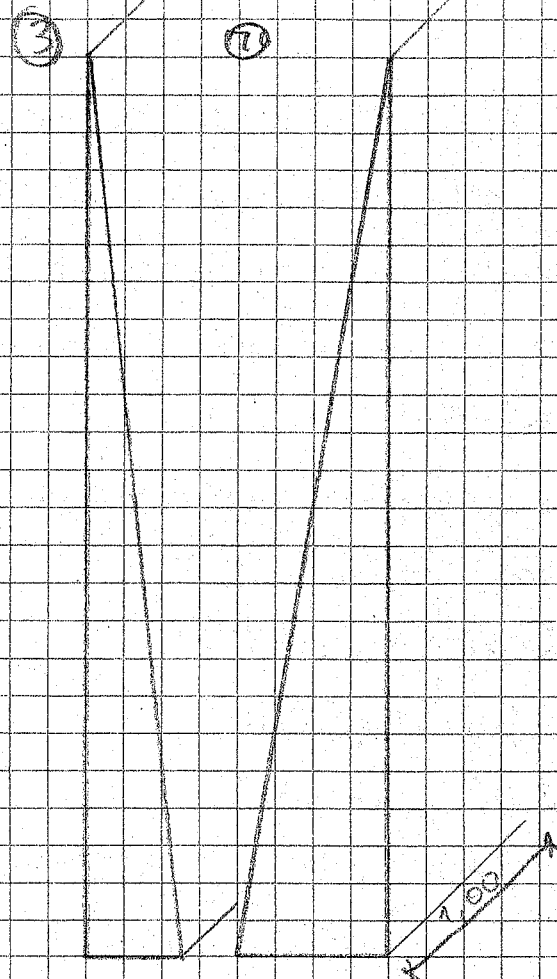
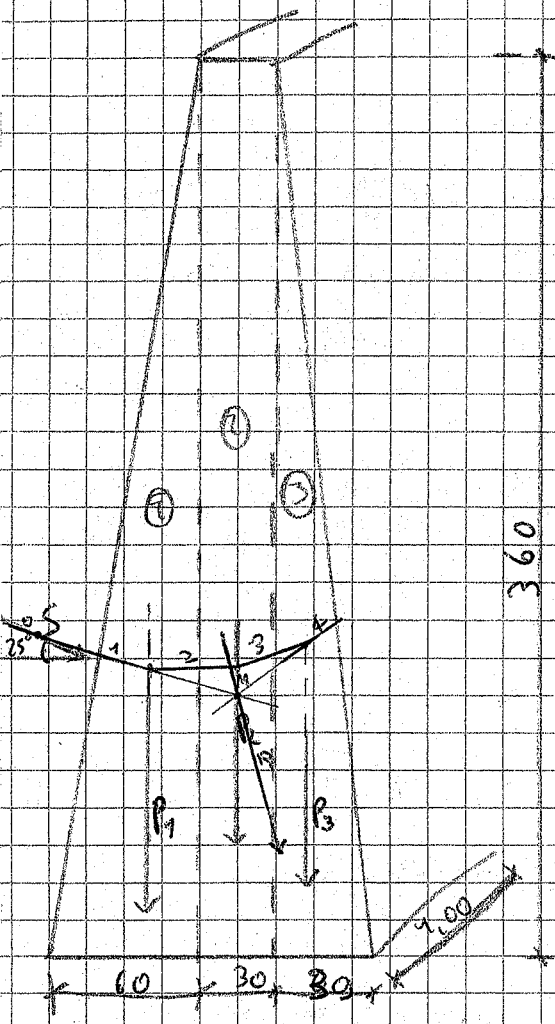
Resistenza A COMPRESSIONE

• È la caratteristica che più si utilizza per i materiali da costruzioni. Essa è misurata dal carico di rottura allo schiacciamento, ricavato da una media dei esperimenti. La compressione ~~per~~ esercitata in direzione normale al piano di giacitura di carà.

RESISTENZA A TRAZIONE

• È inferiore di quella a compressione (da 1/10 a 1/50) le migliori pietre sono quelle a grana

ESERCIZIO N.5



$$P_1 = \frac{0,60 \cdot 360}{2} \times 7,00 \times 24 \text{ KN/m}^3 = 25,92 \text{ KN}$$

SUPERFICIE
PROFONDITA

VOLUME
P. Specifica

$$P_2 = 0,30 \cdot 3,60 \times 7,00 \times 24 \text{ KN/m}^3 = 25,92 \text{ KN}$$

$$P_3 = \frac{0,39 \cdot 360}{2} \cdot 7,00 \cdot 24 \text{ KN/m}^3 = 16,85 \text{ KN}$$

$$S_{1x} = S_1 \cdot \cos 25^\circ = 22,66 \text{ KN}$$

$$S_{1y} = S_1 \cdot \sin 25^\circ = 10,56 \text{ KN}$$

$$\Sigma S_x = 22,66 \text{ KN}$$

$$\Sigma S_y = 10,56 \text{ KN} + P_1 + P_2 + P_3 = 79,25 \text{ KN}$$

$$\alpha = 360^\circ - 74,0479^\circ = 285,9520^\circ$$

$$R = \sqrt{\Sigma S_x^2 + \Sigma S_y^2} = \sqrt{513,4756 + 6280,56} = \sqrt{6794,0381} = 82,42 \text{ KN}$$

$$\tan \delta = \frac{\Sigma S_y}{\Sigma S_x} = \frac{79,25}{22,66} = \text{ordog } 79,25 = 74,0479^\circ$$

ESERCIZIO N. 3

DATI

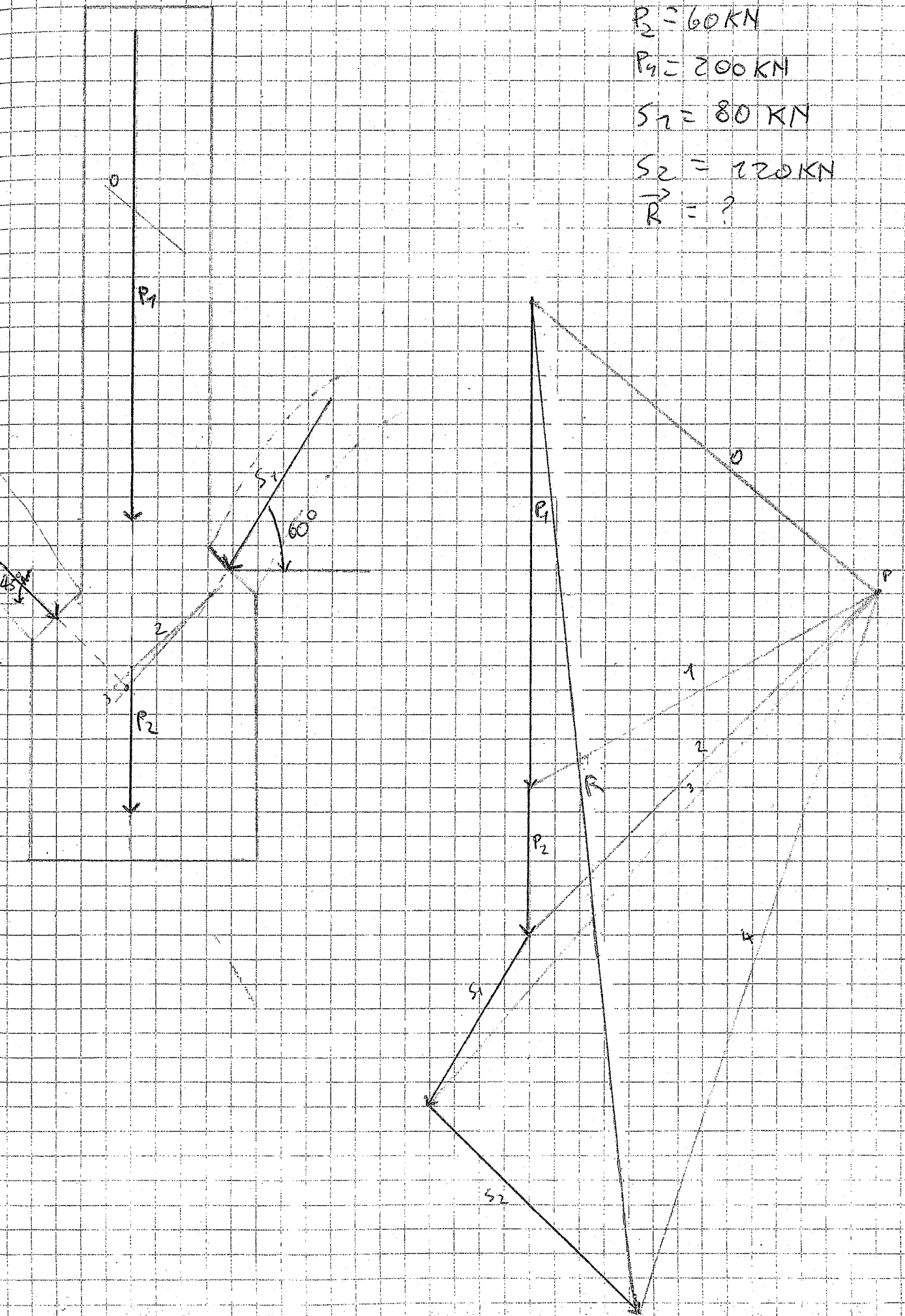
$$P_2 = 60 \text{ KN}$$

$$P_1 = 200 \text{ KN}$$

$$S_1 = 80 \text{ KN}$$

$$S_2 = 120 \text{ KN}$$

$$\vec{R} = ?$$



Definizione L'ARILLA

L'argilla è un materiale che viene estratto dalle cave e non dalle miniere.

L'argilla è composta da = silicati, caolino, marne.

Ci sono diversi tipi di argille:

- Grasse (Usata per i laterizi)

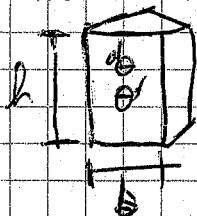
I LATERIZI

I mattoni si dividono in:

- Pieno (< 15%) = Si possono usare per strutture portanti
- Semipieno (~~15-45%~~) (15-45%) = Non sempre si possono usare ^{per strutture portanti}
- Forato (> 45%) = Non si usano per strutture portanti ma per tramezzatura.

Per sapere la percentuale si fa il seguente calcolo:

$$\frac{A_s}{A_f} = \frac{b \cdot h}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2}$$



I LEGANTI

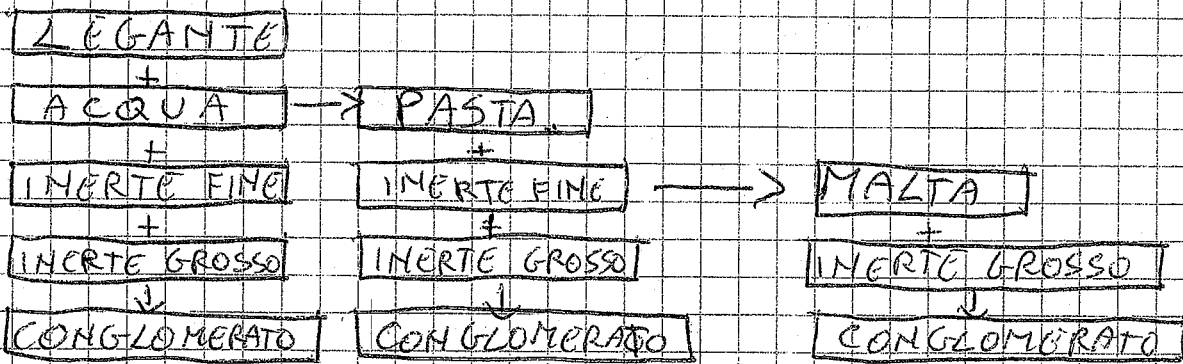
9

Sono materiali da costruzione ottenuti dalla cottura di alcune rocce (gessi - calci - cemento)

Impastati con acqua danno luogo alla formazione di una miscela plastica, che invecchiando progressivamente nel tempo si sviluppa aumentando resistenza meccanica più o meno elevata in rapporto al tipo di legante stesso.

Essi si ottengono unendo dei componenti formando miscela o conglomerati.

Si dividono in:
paste
stucchi o biacche



Il legante reagisce con l'acqua o aria, questa reazione porta alla definizione di 2 fasi:

PRESA → La presa si manifesta con il riassorbimento dell'umidità.
INDURIMENTO → si manifesta successivamente con lo sviluppo di resistenza meccanica.

PRESA { TEMPO INIZIO PRESA → L'impasto inizia a diventare consistente.
TEMPO FINO PRESA → L'impasto può essere manipolato e modellato.

periodo di presa è variabile da alcuni minuti a qualche giorno ed anche più.

L'indurimento si considera convenzionalmente concluso 4 settimane (28gg), e ottiene la maggiore resistenza meccanica del materiale.

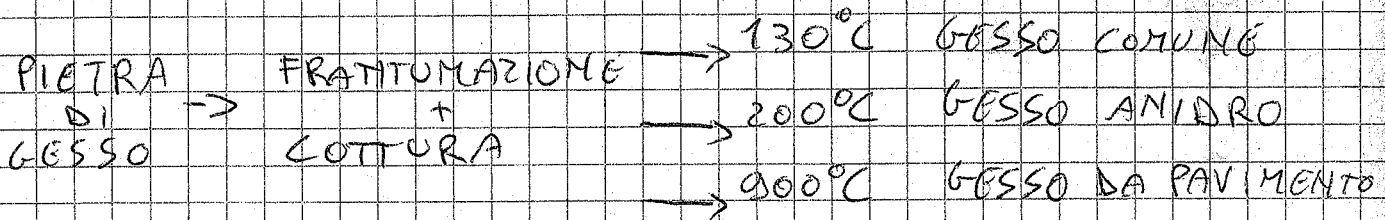
LEGANTI (fanno presa)
AEREI (con aria)

- Calce aerea
- Gesso

LEGANTI (fanno presa in presenza di acqua)
IDRAULICI (di acqua)

- Calci idraulici
- Cementi

LEGANTI AEREI: GESSO

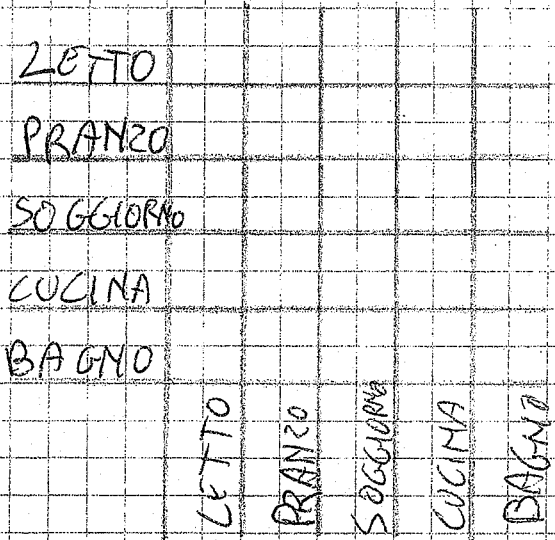


GESSO COMUNE + acqua = malta da gesso usata per il fissaggio di tasselli, staffe.

Gesso anidro + acqua = malta che fa presa più lentamente
Gesso da pavimento + acqua = usato per fissare pavimenti

La Staghola è un miscuglio tra gesso e colla, è usato per stuccare ed è caratterizzata da tempi di presa più lunghi.

- 1) BLOCCHI DI GESSO PER TRAMEZZI (strutture più leggere e non sono intonaco)
- 2) Pannelli per rivestimenti a parete
- 3) Pannelli per controsoffitti
- 4) Cartongesso (pannello composto da gesso e cartone)



SUPERFICIE FINESTRATO $\frac{1}{8}$ SUPERFICIE PAVIMENTATA

$$40m^2 \cdot \frac{1}{8} = 5m^2$$

LA CALCE AEREA

Il carbonato di calcio viene cotto a 900°C e forma la calce viva.

La calce viva può essere usata o deve essere spenta con l'acqua.

CALCARE



FRANTUMAZIONE



COTTURA



CALCE VIVA



SPEGNIMENTO ^{CON} ~~PER~~
GRANDE PRESENZA DI
D'ACQUA

→ GROSSEZZO



SPEGNIMENTO PER
ASPERSIONE



CALCE IDRATA

LA CALCE IDRAULICA

È un legante che fa presa e indurisce anche quando il suo impasto è immerso nell'acqua.

Si ottiene dalla cottura di calcare e argilla.

La proprietà di fare presa anche in acqua si chiama idraulicità.

CALCARE + ARGILLA
10-20%



CALCI
IDRAULICHE

CALCESTRUZZO (CCS)

Calcestruzzo o conglomerato cementizio è costituito da

Legante + Aggregati + Acqua + ^{Essenziali} Additivi

Dopo il fenomeno di presa e indurimento diventa duro e resistente.

Il calcestruzzo viene posto in una cassaforma.

Il getto viene fatto a strati successivi e l'impasto viene battuto o vibrato in modo da occupare tutti i vuoti.

Un'eccessiva vibrazione può però portare alla separazione dei materiali.

Per fare 1 m^3 di calcestruzzo è necessario avere:

$0,8 \text{ m}^3$ di ghiaia

$0,4 \text{ m}^3$ di sabbia

300 Kg cemento

160 l di acqua.

È può essere:

• Alluminoso (usato solo per le grandi strutture perché si ritira)

• Portland

• Pozzolamico

1 m^3 di calcestruzzo = $2400 \text{ Kg/m}^3 \rightarrow 24000 \text{ N/m}^3$

CALCESTRUZZO + FERRO = CEMENTO ARMATO (CA.)

\downarrow
 25 KN/m^3

13

SABBIA =

FINA 0,1 ÷ 0,5

MEDIA 0,5 - 2

GROSSA 2 ÷ 5

RESISTENZA

MALTE IN = M2,5 ; M5 ; M10 ; M15 ; M20 ; M4

Resistenza
a compressione

N/mm²

composizione in volume delle malte

M4 ; M3 ; M2 ; M1

Fuso granulometrico

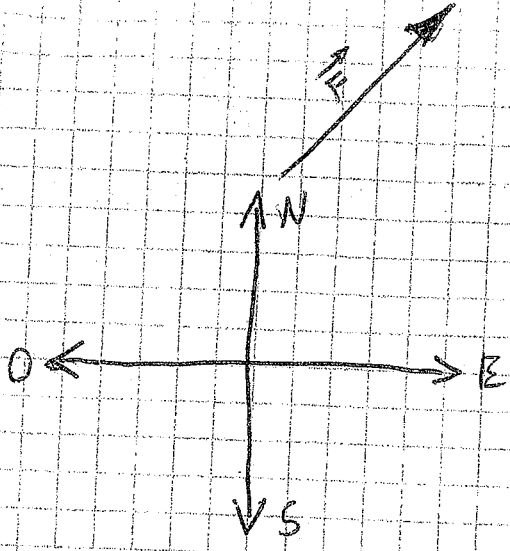
indica quanta sabbia bisogna mettere e il diametro
della sabbia

↓
sabbia = 0 a 7 mm

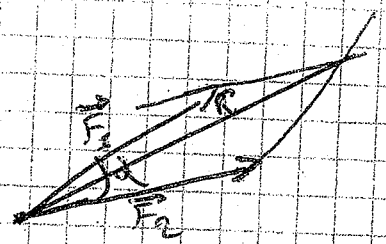
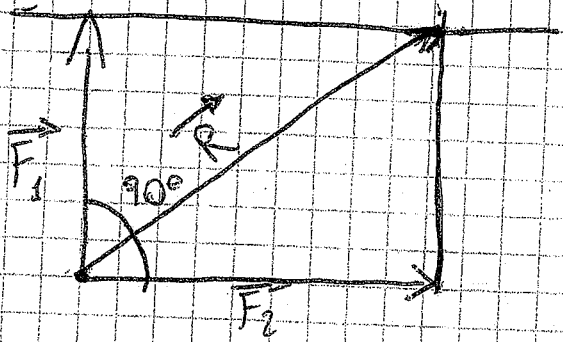
Pietrischella = 7 a 25 mm

Pietrisca = 25 a 30 mm

FORZE VERTICALI

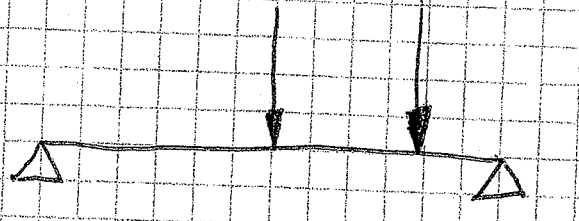


- ① PUNTO DI APPLICAZIONE
- ② MODULO O INTENSITA
- ③ DIREZIONE O VERSO
- ④ LINEA DI AZIONE O TRAIETTORIA



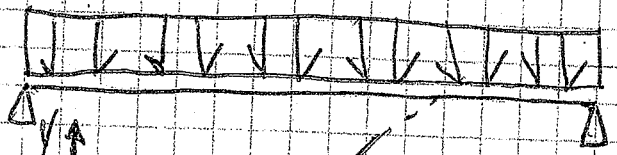
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}$$

~~$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 90^\circ}$$~~

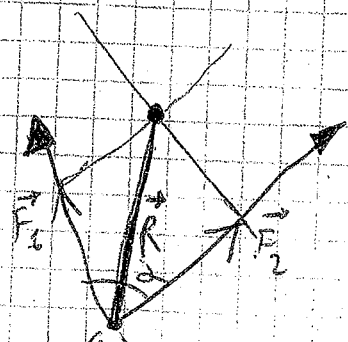
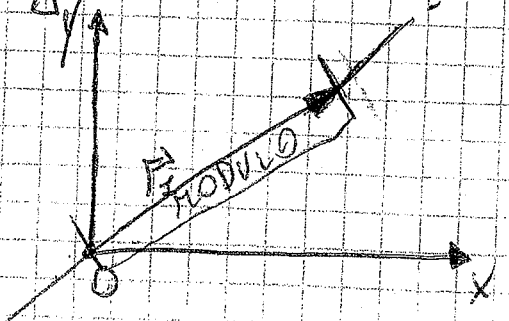


$P = m \cdot g$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$



- 1 VERSO
- 2 PUNTO APPLICAZIONE
- 3 MODULO
- 4 DIREZIONE O LINEA D'AZIO



1

$F_1 = 10\text{ N (N.E.)}$ $F_2 = 6\text{ N}$

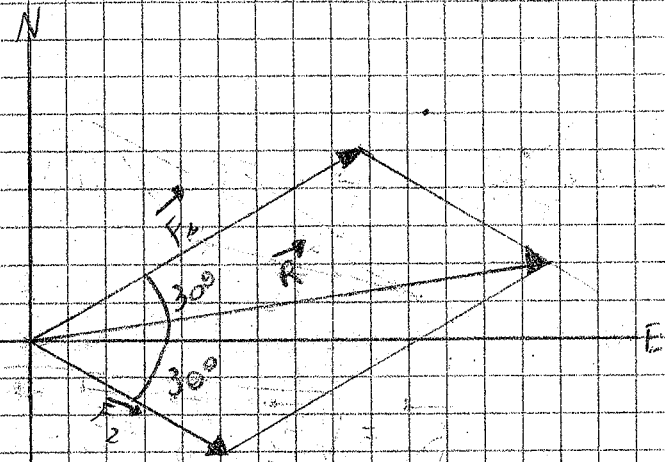
$7 \times 2 = 14\text{ N}$

SCALA 1cm=2N

$$\vec{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{100 + 36 + 20 \cdot 6 \cdot 0,5} = \sqrt{196} = 14\text{ N}$$



5

$F_1 = 10\text{ N (N.E.)}$ $F_2 = 6\text{ N}$

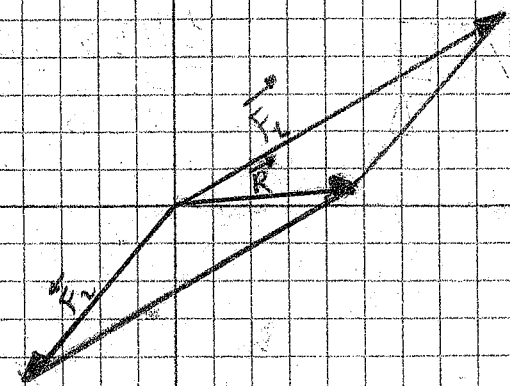
$2,3 \times 2 = 4,6$

SCALA 1cm=2N

$$\vec{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{100 + 36 + 20 \cdot 6 \cdot -0,9396} =$$

$$= \sqrt{23,248} = 4,8216\text{ N}$$



11

2

$$F_1 = 10 \text{ N (N.E.)} \quad F_2 = 6 \text{ N}$$

$$6,3 \times 2 = 12,6$$

SCALA 1cm = 2

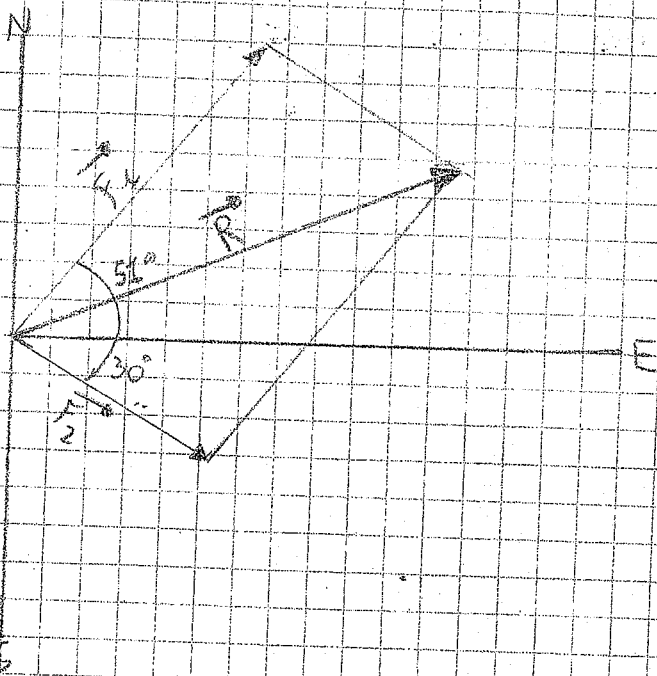
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 0,9164} =$$

~~$$= \sqrt{150} = 12,2474$$~~

~~$$= \sqrt{149} = 12,2065 \text{ N}$$~~

$$= \sqrt{149} = 12,2065 \text{ N}$$



3

$$F_1 = 10 \text{ N (N.E.)} \quad F_2 = 6 \text{ N}$$

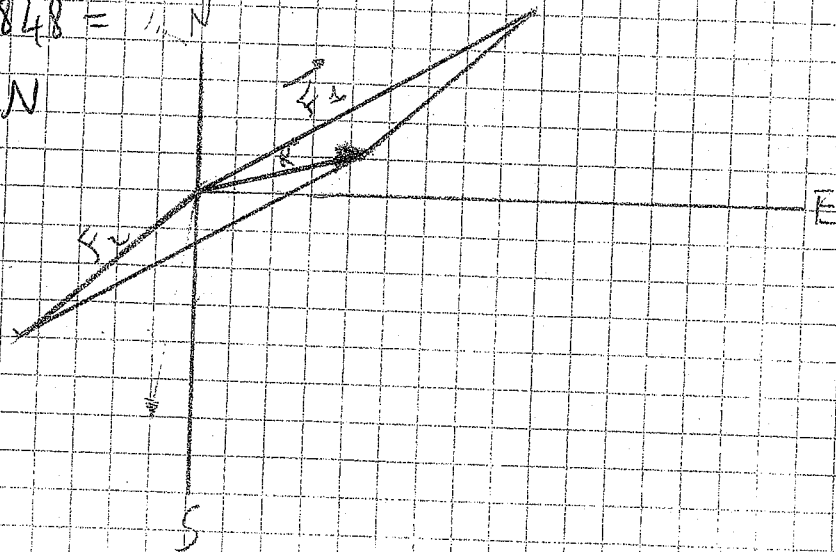
$$2,2 \times 2 = 4,4$$

SCALA 1cm = 2

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot -0,91848} = 1,1 \text{ N}$$

$$= \sqrt{17,824} = 4,2218 \text{ N}$$



3

$1 \text{ N} = 10^{-7} \text{ ON} = \text{N}$
 $1 \text{ N} = 0,98 \text{ Kg}$
 $P = m \cdot a$
 $1 \text{ Kg} = 9,8 \text{ N} = 10 \text{ N}$

1 N
 $1 \text{ da (DECA) N} = 10$
 $1 \text{ K (KILLO) N} = 1000$
 1 M (MEGA) N
 1 G (GIGA) N
 50 N
 500 p N
 $F = \text{mm}$

POLIGONO FUNICOLARE

COSTE

Costruzione grafica: serve per trovare, con procedimento unico, il vettore risultante \vec{R} di due o più vettori del piano; nel caso di due soli vettori è preferibile il metodo del parallelogramma

L'alternativa al metodo del poligono funicolare è l'applicazione ripetuta del metodo del parallelogramma. Questa alternativa, però, non è efficace perché è lunga (per sommare 5 vettori devo applicare il metodo 4 volte) e rende il foglio illeggibile (a causa delle numerose linee di costruzione).

VEETTORE

Un **vettore** rappresenta graficamente una "grandezza vettoriale", cioè una grandezza che, per essere completamente definita, necessita di intensità, direzione e verso (Per esempio lo spostamento è un vettore, la temperatura non è un vettore). Un vettore si disegna con una freccia. Va sempre indicata sul disegno la scala per la lettura dell'intensità.

VEETTORE RISULTANTE o RISULTANTE

Il vettore **risultante**, detto anche "la risultante", è quello da solo ha lo stesso effetto fisico dei vettori del sistema dato. Pertanto esso può essere usato come sostituto dell'intero sistema di vettori. (Esempio: spostamento di un passeggero rispetto al ponte della nave composto con il vettore spostamento della nave danno il vettore risultante, che è lo spostamento effettivo del passeggero rispetto al mare)

METODO (con riferimento alla figura)

1. Tracciare le rette d'azione dei vettori e assegnare il nome ai vettori e alle loro rette d'azione (a,b,c,...)
2. Sulla parte destra del foglio costruire il poligono dei vettori (con il metodo cosiddetto "punta coda")
3. La risultante \vec{R} (provvisoria) inizia nel punto di applicazione P del primo vettore e termina nella punta Q dell'ultimo vettore
4. Scegliere un punto H a destra (a distanza "ottimale") e tracciare le "funi" (sempre una più dei vettori); la terza fune, III, per esempio, collega il punto H con l'inizio del vettore tre
5. Dare i nomi alle funi (con numero romano) e cerchiare la prima e l'ultima fune
6. In alto a sinistra rispetto al sistema dei vettori originali scegliere un punto J, a distanza "ottimale"
7. Dal punto J condurre la prima fune (parallela a quella disegnata a destra!) fino ad incontrare la retta del primo vettore nel punto A. Scrivere il numero romano della fune.
8. Dal punto A condurre la seconda fune fino ad incontrare la retta del secondo vettore nel punto B. Scrivere il numero romano della fune.
9. Si prosegue analogamente con i punti C, D fino a che l'ultima fune non ha nulla da incontrare
10. La prima e ultima fune, contrassegnate, vengono fatte intersecare nel punto K
11. Nel punto K si conduce la retta parallela alla retta della risultante \vec{R} , trovata precedentemente
12. La risultante \vec{R} può essere applicata in qualsiasi punto di questa retta

4