

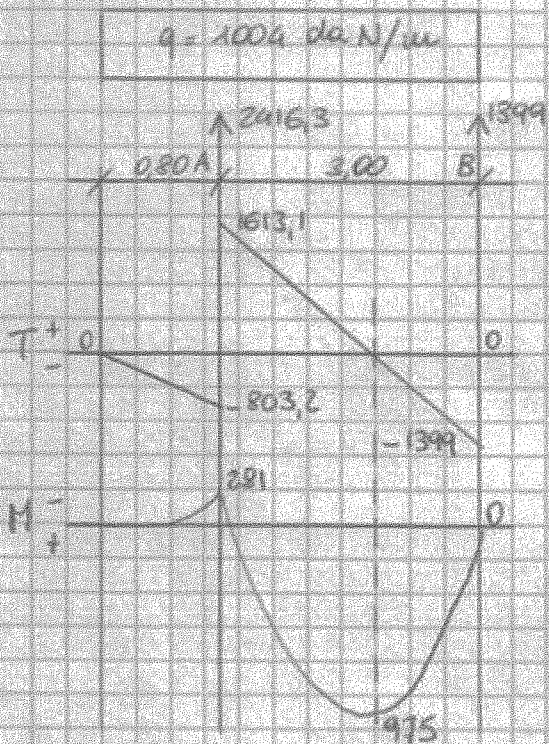
Carico accidentale  
 $400 \text{ daN/m}^2$   
 " permanente  
 $200 \text{ daN/m}^2$   
 Tavolato in legno

1) Tavolato (legno)

1.1 Analisi dei carichi

Carico accidentale	$400 \cdot 1,5 \cdot 1 =$	$600 +$
" permanente	$200 \cdot 1,5 \cdot 1 =$	$300 +$
peso proprio		
Stipite $h = \frac{l}{30} = \frac{3,00}{30} = 10 \text{ cm}$		
	$300 \cdot 1,3 \cdot 1 \cdot 1 =$	$104 =$
		<hr/>
		$1004 \text{ daN/m}$

1.2 Sollecitazioni



$$\sum V = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} V_A + V_B - 1004 \cdot 3,00 &= 0 \\ \sum M_B = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} V_A \cdot 3 - 1004 \cdot \frac{3,00^2}{2} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$V_A = 2416,3$   
 $V_B = 1399$

$$T_{A1} = -1004 \cdot 0,8 = -803,2$$

$$T_{A2} = -803,2 + V_A = 1613,1$$

$$T_{B1} = 1613,1 - 1004 \cdot 3 = -1399$$

$$T_{B2} = -1399 + V_B = 0$$

$$X_0 = \frac{T_B}{q} = \frac{1399}{1004} = 1,39 \text{ m}$$

$$M_x = -V_B \cdot 1,39 + \frac{1004 \cdot 1,39^2}{2} = 975 \text{ daN/m}$$

$$M_A = -V_B \cdot 3 + \frac{1004 \cdot 3^2}{2} = -281 \text{ daN/m}$$

### 1.3 Progetto

$$W^* = \frac{M_{ed}}{f_{ywd}} = \frac{975(100)}{99} = 984,85 \text{ cm}^3$$

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot W^*}{b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 984,85}{100}} = 7,69 \text{ cm}$$

Assumo  $h = 10 \text{ cm}$

### 2) Trave principale

#### 2.1 Analisi dei carichi

Carico permanente =  $VA = 2416,3 \text{ daN/m}$

Peso proprio

Stivio  $h = \frac{150}{10} = 15 \text{ cm}$

Assumo IPE 160 =  $15,2 \cdot 1,3 = 20,54 \text{ daN/m}$

---

2437 daN/m

#### 2.2 Sollecitazioni

$$T_{max} = q \cdot l = 2437 \cdot 1,50 = 3655,50 \text{ daN/m}$$

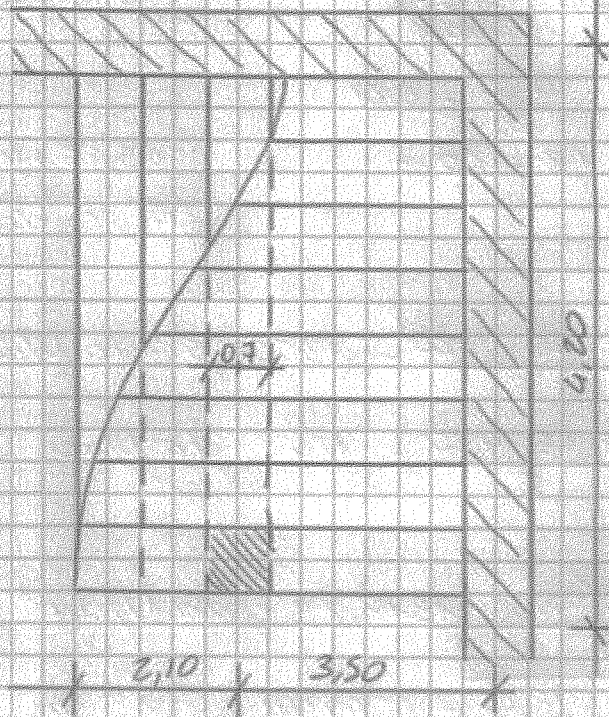
$$M_{ed} = \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{2437 \cdot 1,50^2}{2} = 2721,63 \text{ daN/m}$$

#### 2.3 Progetto

$$W^* = \frac{M_{ed} \cdot 1,05}{f_{yK}} = \frac{2721,63 \cdot 1,05}{2150} = 133,29 \text{ cm}^3$$

Assumo IPE 180  $\rightarrow W_p = 166,4 \text{ cm}^3$

$$M_{CRD} = \frac{W_p \cdot f_{yK}}{1,05} = \frac{166,4 \cdot 2150}{1,05} = 3407,24 \text{ daN/m}$$



Carichi accid 300  
 " perm 200

### 1) Tavolato

#### 1.1 Analisi dei carichi

Carico accidentale	$300 \cdot 1,5 \cdot 1 =$	450 daN/m
" permanente	$200 \cdot 1,5 \cdot 1 =$	300 daN/m
Peso proprio Stucco 3 cm	$0,03 \cdot 1,3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 800 =$	31,2 daN/m
		<u>781,2 daN/m</u>

#### 1.2 Calcolo reazioni

$$M_{ed} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{781,2 \cdot 0,17^2}{8} = 47,25 \text{ daN/m} \rightarrow 48$$

$$T_{uax} = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{781,2}{2} = 390,6 \rightarrow 273,42 \rightarrow 273 \text{ daN/m}$$

#### 1.3 Progetto

$$M_{ed} = f_{uad} \cdot W_{pl} \rightarrow W_{pl} = \frac{M_{ed}}{f_{uad}} = \frac{48(0)}{99} = 48,48$$

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot W_{pl}}{b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 48,48}{100}} = 1,70 \rightarrow 3 \text{ cm (minimo spessore Tavolati)}$$

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{100 \cdot 3^2}{6} = 150 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{uax} = \frac{M_{ed}}{W_x} = \frac{48(0)}{150} = 32 \ll f_{uad} 99$$

## 2) Travetto legno

### 2.1 Analisi dei carichi

$$\text{Carico trasmesso } 273 \cdot 2 = 546 \text{ daN/m} \quad (\text{Twax})$$

$$\text{Peso proprio} \\ \text{Stagno } h = \frac{e}{20} = \frac{4,20}{20} = 0,21$$

$$0,21 \cdot 0,21 \cdot 1,3 \cdot 800 = 45,86 \text{ daN/m}$$

$$\underline{591,86 \text{ daN/m}}$$

### 2.2 Sollecitazioni

$$M_{\text{xd}} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{591,86 \cdot 4,20^2}{8} = 1305,05 \text{ daNm}$$

$$T_{\text{wax}} = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{591,86 \cdot 4,20}{2} = 1243 \text{ daN}$$

### 2.3 Progetto

$$W_x = \frac{M_{\text{xd}}}{f_{\text{wood}}} = \frac{1305(05)}{99} = 1318,23 \text{ daNm}^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_x}{0,7}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1318,23}{0,7}} = 22,44 \text{ cm} \rightarrow 23 \text{ cm}$$

$$b = 23 \cdot 0,7 = 16,1 \rightarrow \text{arrotondo } 17 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{wax}} = \frac{M_{\text{xd}}}{W_x} = \frac{1305(05)}{1318,23} = 99 = f_{\text{wood}} 99$$

## 3) Travi principali

### 3.1 Analisi dei carichi

Carico trasmesso distribuito uniforme

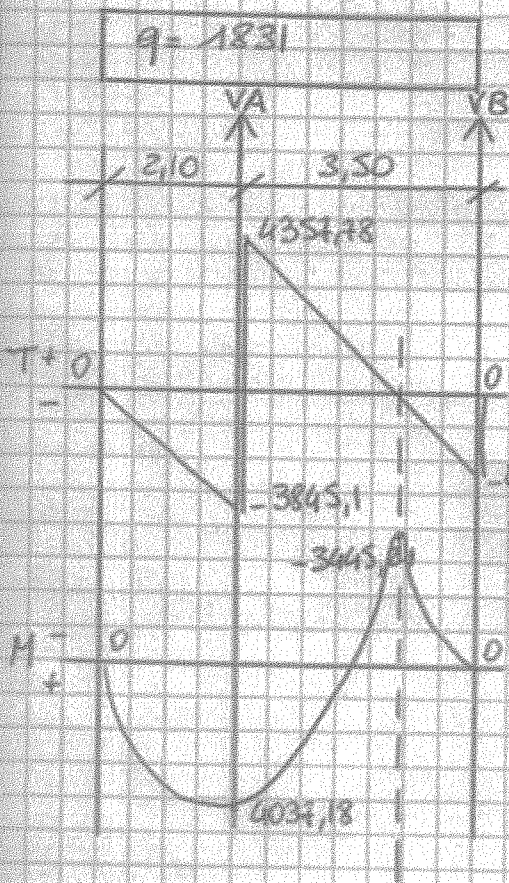
$$\frac{T_{\text{wax}}}{l_{\text{wax}}} = \frac{1243}{0,7} = 1775,71 \text{ daN/m}$$

$$\text{Peso proprio} \\ \text{Stagno } h = \frac{e}{20} = \frac{5,60}{20} = 0,28$$

$$\text{Stagno IPE 300} \\ 40,2 \cdot 1,3 = 54,86 =$$

$$\underline{1830,57}$$

### 3.2 Sollecitazioni



$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \\ \sum V &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_A + V_B - 1831 \cdot 5,60 = 0 \\ V_A - 3,50 - 1831 \cdot 5,60 - 2,80 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = -V_A + 10253,6 \\ V_A = 8202,88 \end{cases}$$

$$V_B = 2050,72$$

$$T_A \begin{cases} -1831 \cdot 2,10 = -3845,1 \\ -3845,1 + 8202,88 = 4357,78 \end{cases}$$

$$T_B \begin{cases} 4357,78 - 1831 \cdot 3,50 = -2050,72 \\ -2050,72 + 2050,72 = 0 \end{cases}$$

$$M_A = -1831 \cdot 2,10 \cdot 1,05 = -4037,18$$

$$x = \frac{T_B}{q} = \frac{2050,72}{1831} = 1,12 \text{ m}$$

$$M_x = -V_B \cdot x - 1831 \cdot \frac{x^2}{2} = -2050,72 \cdot 1,12 - 1831 \cdot \frac{1,12^2}{2} = -3445,21$$

$$M_B = -1831 \cdot 5,60 - 2,80 + 8202,88 \cdot 3,50 = 0$$

### 3.3 Progetto

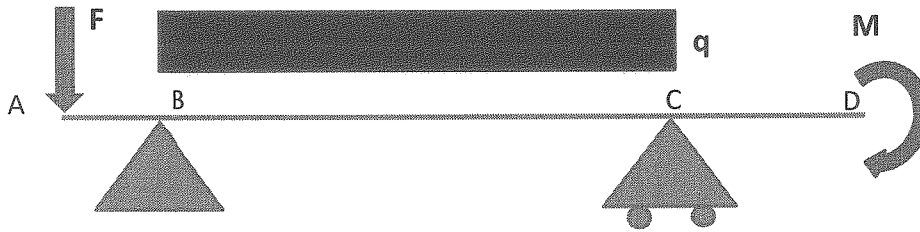
$$M_{CRD} = \frac{f_{yk} \cdot W^*}{1,05} \Rightarrow W^* = \frac{M_{ed} \cdot 1,05}{f_{yk}} = \frac{4037(18) \cdot 1,05}{2150} = 197,16$$

$$\text{Adunno IPE 200} \rightarrow W_{pe} 220,6$$

$$M_{CRD} = \frac{W_{pe} \cdot f_{yk}}{1,05} = \frac{220,6 \cdot 2150}{1,05} = 4517(04) > M_{ed} 4037(18)$$

Verificato

# ESERCIZIO 4<sup>o</sup> B COSTRUZIONI - APRILE 2015



F	6,0	kN
q	7,0	kN/m
M	2,0	kNm

Q	35,0	kN
---	------	----

H <sub>B</sub>	0,00	kN
R <sub>B</sub>	24,30	kN
R <sub>C</sub>	16,70	kN

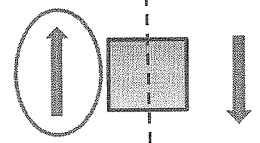
lunghezze [m]	1,0	5,0	2,0
---------------	-----	-----	-----

## Determinazione del TAGLIO

Calcoliamo il valore del Taglio considerando le forze che **precedono** la sezione in cui ci mettiamo

Considerando le forze che precedono la sezione poco dopo il punto A	$T_A = -F$	$T_A$	-6,0	kN
Considerando le forze che precedono la sezione poco prima il punto B	$T_B^{(s)} = -F$	$T_B^{(s)}$	-6,0	kN
Considerando le forze che precedono la sezione poco dopo il punto B	$T_B^{(d)} = -F + R_B$	$T_B^{(d)}$	18,3	kN
Considerando le forze che precedono la sezione poco prima il punto C	$T_C^{(s)} = -F + R_B - Q$	$T_C^{(s)}$	-16,7	kN
Considerando le forze che precedono la sezione poco dopo il punto C	$T_C^{(d)} = -F + R_B - Q + R_C$	$T_C^{(d)}$	0,0	kN
Considerando le forze che precedono la sezione poco prima il punto D	$T_D = -F + R_B - Q + R_C$	$T_D$	0,0	kN

Positive se sono rivolte così:

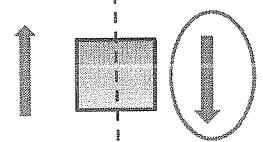


la linea tratteggiata indica la sezione che considero

Gli stessi valori del Taglio si potrebbero ottenere considerando le forze che **seguono** la sezione in cui ci mettiamo

Considerando le forze che seguono la sezione poco dopo il punto A	$T_A = -R_B + Q - R_C$	$T_A$	-6,0	kN
Considerando le forze che seguono la sezione poco prima il punto B	$T_B^{(s)} = -R_B + Q - R_C$	$T_B^{(s)}$	-6,0	kN
Considerando le forze che seguono la sezione poco dopo il punto B	$T_B^{(d)} = Q - R_C$	$T_B^{(d)}$	18,3	kN
Considerando le forze che seguono la sezione poco prima il punto C	$T_C^{(s)} = R_C$	$T_C^{(s)}$	-16,7	kN
Considerando le forze che seguono la sezione poco dopo il punto C	$T_C^{(d)} = 0$	$T_C^{(d)}$	0,0	kN
Considerando le forze che seguono la sezione poco prima il punto D	$T_D = 0$	$T_D$	0,0	kN

Positive se sono rivolte così:



la linea tratteggiata indica la sezione che considero

Il Taglio si annulla nel tratto BC. La legge di variazione del taglio in questo tratto è

$$T_{AB} = -F + R_B - q \cdot x$$

Per conoscere il valore dell'ascissa (con origine nel punto B) in cui si annulla il taglio, si pone l'espressione precedente pari a zero e si ricava x

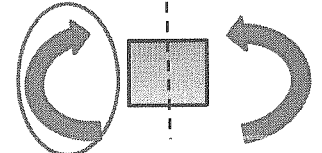
$$x = (-F + R_B) / q = 2,61 \text{ m}$$

## Determinazione del Momento Flettente

Calcoliamo il valore del Momento considerando le forze che **precedono** la sezione in cui ci mettiamo

Considerando i momenti che precedono la sezione in A	$M_A = 0$	$M_A$	0,0	kNm
Considerando i momenti che precedono la sezione in B	$M_B = -F \cdot 1 \text{ m}$	$M_B$	-6,0	kNm
Considerando i momenti che precedono la sezione in C	$M_C = -F \cdot 6 \text{ m} + R_B \cdot 5 \text{ m} - Q \cdot (5 \text{ m} / 2)$	$M_C$	-2,0	kNm
Considerando i momenti che precedono la sezione in D	$M_D = -F \cdot 6 \text{ m} + R_B \cdot 7 \text{ m} - Q \cdot (2,5 \text{ m} + 2 \text{ m}) + R_C \cdot 2 \text{ m}$	$M_D$	-2,0	kNm

Positive se sono rivolte così:

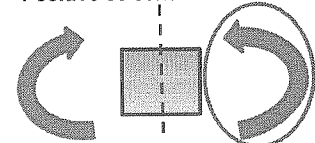


la linea tratteggiata indica la sezione che considero

Gli stessi valori del Momento si potrebbero ottenere considerando le forze che **seguono** la sezione in cui ci mettiamo

Considerando i momenti che seguono la sezione in A	$M_A = R_B \cdot 1 - Q \cdot (2,5 \text{ m} + 1 \text{ m}) + R_C \cdot 6 \text{ m} - M$	$M_A$	0,0	kNm
Considerando i momenti che seguono la sezione in B	$M_B = -Q \cdot (2,5 \text{ m}) + R_C \cdot 5 \text{ m} - M$	$M_B$	-6,0	kNm
Considerando i momenti che seguono la sezione in C	$M_C = -M$	$M_C$	-2,0	kNm
Considerando i momenti che seguono la sezione in D	$M_D = -M$	$M_D$	-2,0	kNm

Positive se sono rivolte così:



la linea tratteggiata indica la sezione che considero

Il Momento flettente assume valore massimo laddove il taglio è nullo.

La legge di variazione del momento lungo il tratto BC è

$$M_{AB} = -F(1 \text{ m} + x) + R_B \cdot x - q \cdot (x^2 / 2)$$

Il Momento flettente massimo vale in corrispondenza di  $x = 2,61\text{m}$

----->  $M_{\max} = 17,92 \text{ kNm}$

**PROGETTO A FLESSIONE**

Progettare la sezione della trave assegnato il materiale da utilizzare significa **determinare le dimensioni** della sezione

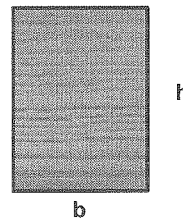
Saranno dunque noti  $M_{\max} = 17,92 \text{ kNm}$  ottenuto dal diagramma delle sollecitazioni

$\sigma_{\text{amm}} = 10,0 \text{ N/mm}^2$  dalla normativa, in funzione del materiale e del tipo di sollecitazione  
Nel caso in esame la trave è di LEGNO. (Abete)

**Formula di Progetto**  
 $W_{\min} \geq M / \sigma_{\text{amm}}$

Il Modulo di Resistenza  $W$  per sezioni rettangolari è pari a :

$W = 2J/h = bh^2/6$



Si fissa il valore della base, o il rapporto tra base ed altezza e si ricava  $h$

Nel caso in esame si fissa a piacere  $b = 160 \text{ mm}$

Dalla relazione inversa della formula di progetto si ricava l'incognita  $h$  :

$W_{\min} \geq M / \sigma_{\text{amm}} = bh^2/6 \geq M / \sigma_{\text{amm}} = h = \sqrt{6M / b \sigma_{\text{amm}}} = 259,2 \text{ mm}$   
 approssimazione  $\downarrow$   
 $260 \text{ mm}$

Il rapporto tra base e altezza dev'essere compreso circa tra 0,6 e 0,75

Nel caso in esame  $b/h = 0,62$

**VERIFICA A FLESSIONE**

**Formula di Verifica**  
 $\sigma_{\max} = M / W_{\min} \leq \sigma_{\text{amm}}$   
FORMULA di Navier

Sono note le dimensioni della sezione e si confronta la tensione ammissibile con quella massima.

$b = 160 \text{ mm}$        $h = 260 \text{ mm}$

$\sigma_{\max} = M_{\max} / (bh^2/6) = 9,94 \text{ N/mm}^2 < 10,00 \text{ N/mm}^2$  La Verifica è soddisfatta

**VERIFICA A TAGLIO**

**Formula di Verifica**  
 $\tau_{\max} = 1,5V / A \leq \tau_{\text{amm}}$

La formula di verifica a Taglio deriva da quella più generale (F. Jourawsky)

$\tau_{\max} = 1,5V / A \leq \tau_{\text{amm}}$

con  $V$  taglio massimo (sull'appoggio) e  $A = bh$

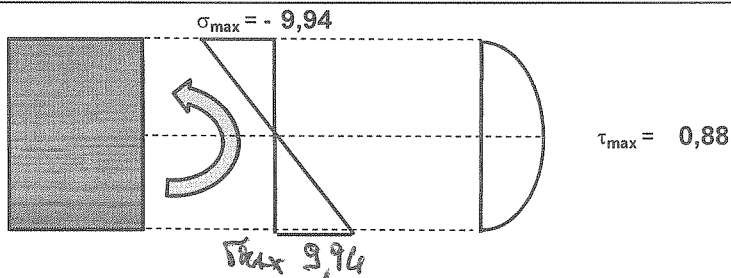
$A = 41600 \text{ mm}^2$

$\tau_{\max} = 0,88 \text{ N/mm}^2 < 0,90 \text{ N/mm}^2$

$V = T_{\max} = 24,3 \text{ kN} = 24300 \text{ N}$

La Verifica è soddisfatta

**DIAGRAMMI DELLE TENSIONI**



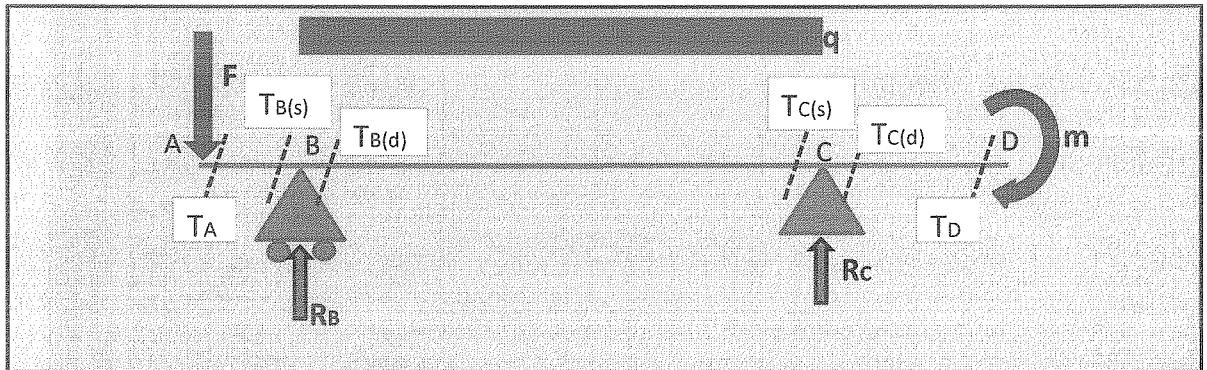
**EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA**

$$\left. \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases} \right\} \begin{cases} H_c = 0 \\ -F + R_B - Q + R_c = 0 \\ -F * 1 \text{ m} + Q * (5\text{m} / 2) - R_c * 5\text{m} + M = 0 \\ \text{(equazione di equilibrio attorno al punto B)} \end{cases}$$

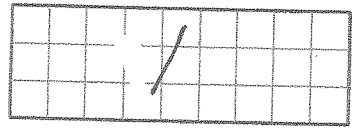
Risolviendo il sistema si risale al valore delle reazioni vincolari

$H_B$	<b>0,0</b>	<i>kN</i>
$R_B$	<b>24,3</b>	<i>kN</i>
$R_C$	<b>16,7</b>	<i>kN</i>

Il seguente schema individua le sezioni in cui calcoliamo il Taglio :







## 1) GLI ORGANISMI STRUTTURALI IN UNA COSTRUZIONE

Ogni costruzione si compone di elementi tra loro assemblati

elementi  $\left\{ \begin{array}{l} \text{di finitura} \\ \text{strutturali} \end{array} \right.$

## 2) LA PROGETTAZIONE DEGLI ELEMENTI STRUTTURALI

- a) Individuazione dello schema statico
- b) Analisi dei carichi
- c) Risoluzione dello schema statico sui carichi (reazioni vincolari)
- d) Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione
- e) Analisi tensionale in progetto e verifica degli elementi strutturali

## 3) UNITA' DI MISURA

FORZE  $\rightarrow$  N (Newton)      1 Kg = 9,81 N

1 Kg = 1 daN

TENSIONI  $\rightarrow$  1 Pa =  $\frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2}$  (Pascal)

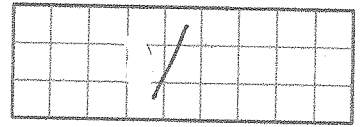
$$1 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 0,10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 0,10 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ MPa} = \frac{10^6 \text{ N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

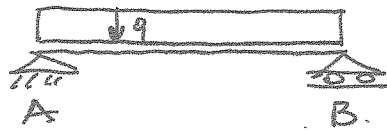
## 4) LE STRUTTURE ISOSTATICHE

Le equazioni fondamentali  
della statica dei sistemi  
rigidi

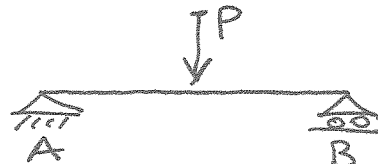
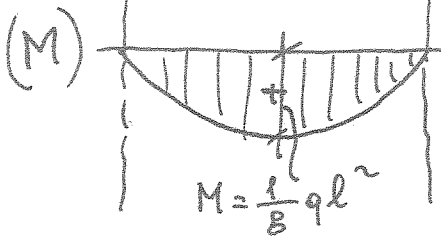
$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_o = 0 \\ \Sigma F_v = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{array} \right.$$



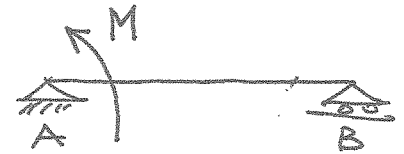
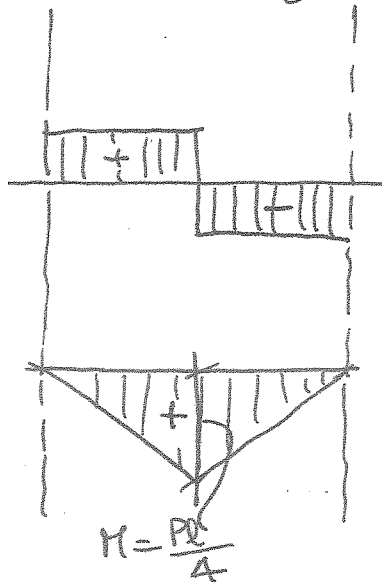
# 4) RIEPILOGO STRUTTURE ISOSTATICHE



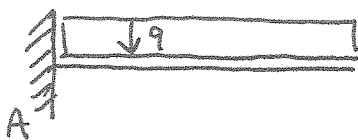
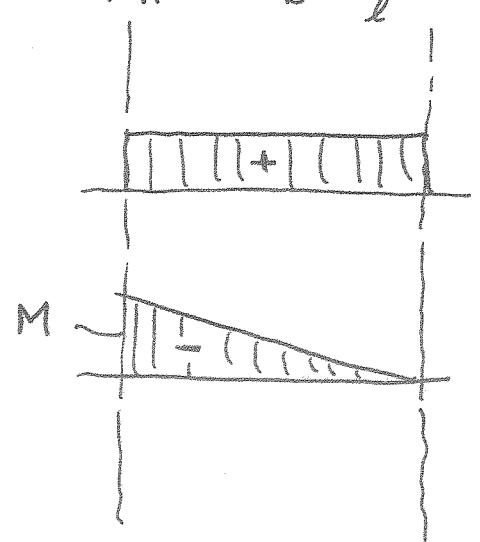
$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$



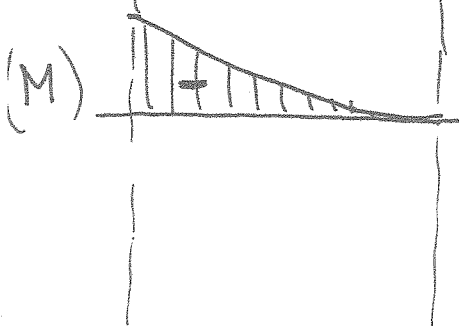
$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$



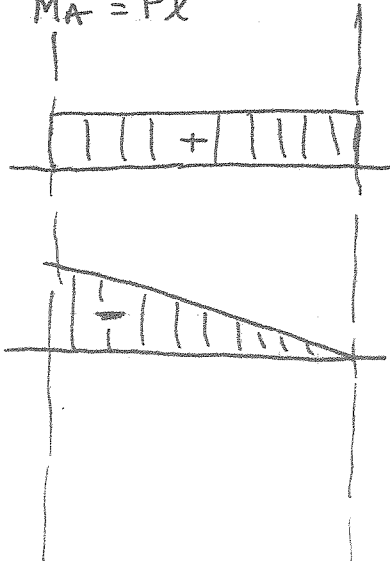
$$R_A = -R_B = \frac{M}{l}$$



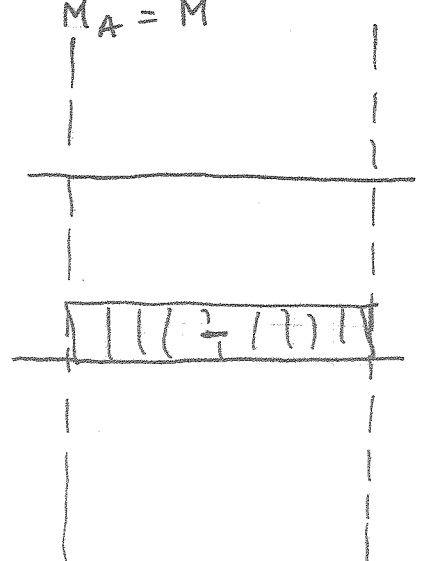
$$R_A = ql$$
$$M_A = \frac{ql^2}{2}$$

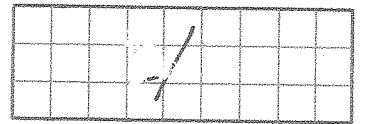


$$R_A = P$$
$$M_A = Pl$$

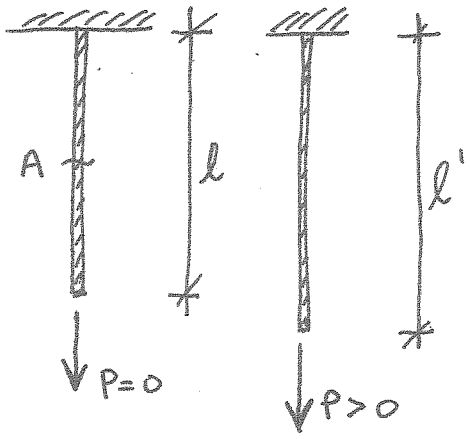


$$R_A = 0$$
$$M_A = M$$





## 5) LA DEFORMABILITA' DEI CORPI



$$\Delta l = l' - l$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \left( \begin{array}{l} \text{coeff. di dilatazione} \\ \text{dilatazione unitaria} \end{array} \right)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \left( \begin{array}{l} \text{tensione unitaria} \end{array} \right)$$

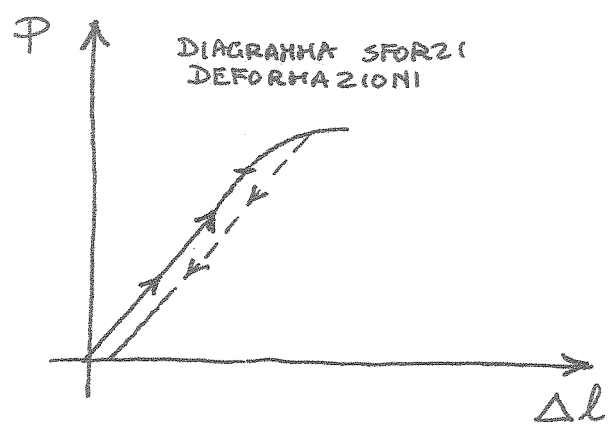
$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}$$

$$\Rightarrow E \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{A} \Rightarrow$$

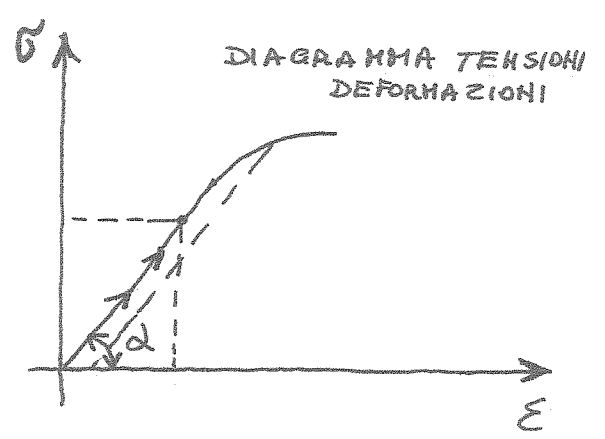
$$E \epsilon = \sigma$$

LEGE DI HOOKE

E = modulo di elasticita' (modulo di Young)

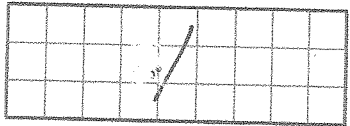


campo elastico



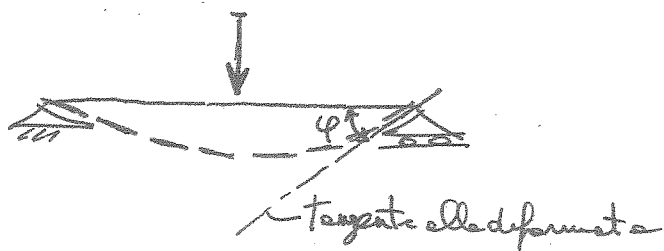
$$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$$

E =	2100000	da N/cm <sup>2</sup>	≡	210.000	N/mm <sup>2</sup>	acciaio
E =	300000	"	≡	30000	"	calcestruzzo
E =	80000	"	≡	8000	"	legno
E =	70000	"	≡	7000	"	mattoni pieni

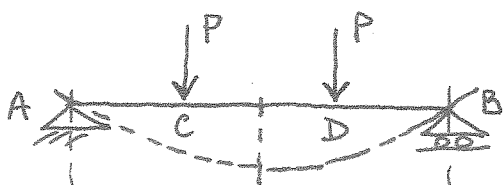
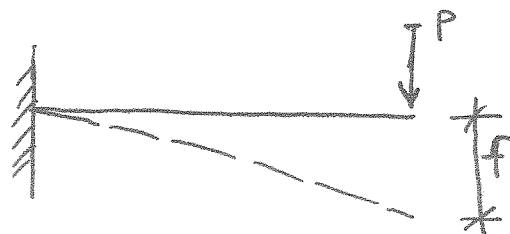
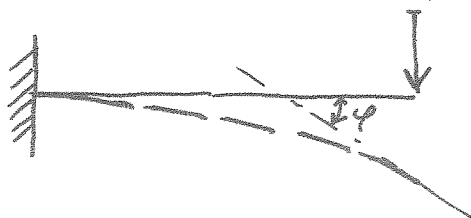
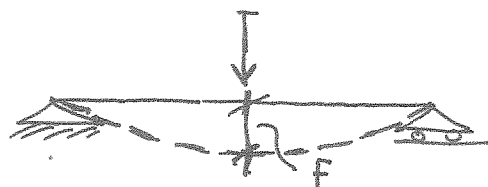


6) Le deformazioni per flessione :

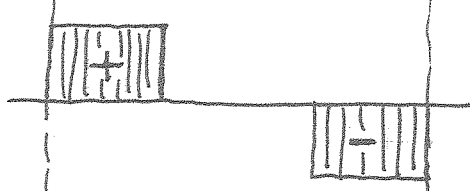
Rotazione



Abbassamento

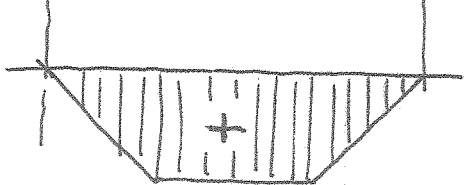


(T)



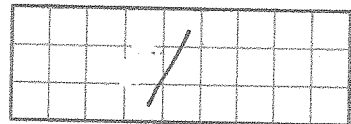
T = 0

(M)

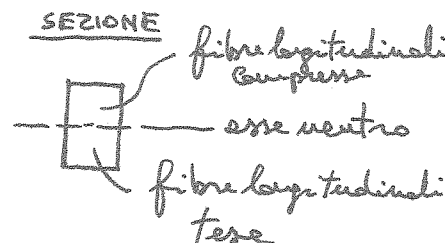
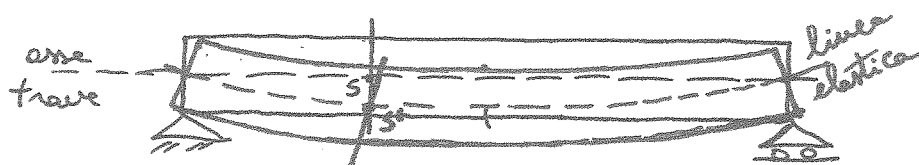


Nel tratto CD e' e'  
flessione pura

Nel tratto AB  
e' e' flessione pura



## La deformazione per flessione semplice



Linea elastica = asse geometrico del solido deformato

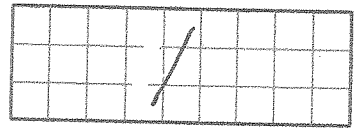
La generica sezione subisce un allungamento e una rotazione -

Allungamento o freccia elastica = distanza fra un punto  $S$  sull'asse geometrico indeformato e la corrispondente posizione  $S'$  sulla linea elastica

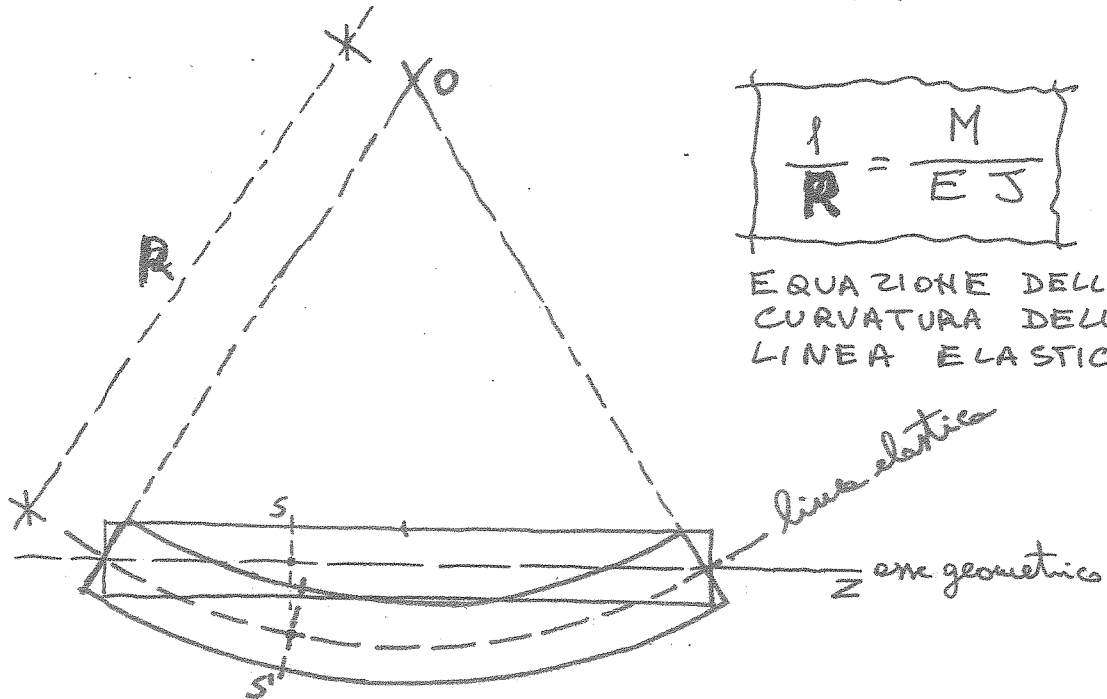
Rotazione = angolo che la tangente alla linea elastica in un punto forma con l'asse geometrico indeformato

essendo la normale tangente perpendicolare al piano della sezione retta sulla trave deformata, tale angolo corrisponde a quello formato da una generica sezione passando dalla posizione originaria  $S$  e quella  $S'$  sulla trave deformata

N.B. Su tutta la trattazione si ipotizza la conservazione delle sezioni piane

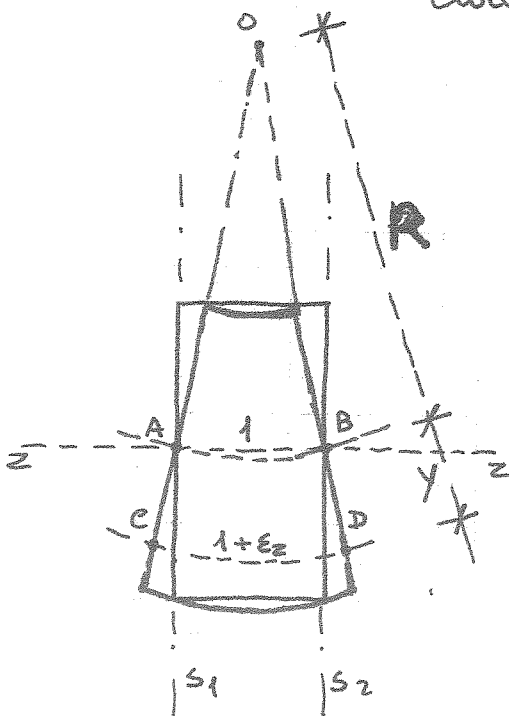


## 7) La linea elastica e la sua curvatura



L'asse geometrico del solido deformato presenta una curvatura con raggio " $R$ " molto grande

$$\text{curvatura} = \frac{1}{R}$$



Consideriamo due sezioni  $S_1$  e  $S_2$  a distanza unitaria. La fibra a distanza  $y$  dall'asse neutro subisce un allungamento da 1 a  $1 + \epsilon_z$

Dato il valore molto grande di " $z$ " gli archi  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  possono essere approssimati a tratti rettilinei, per cui dalla similitudine dei due triangoli  $OAB$  e  $OCD$  risulta:

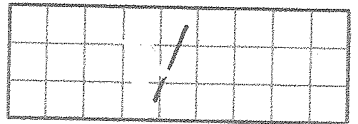
$$\frac{1 + \epsilon_z}{1} = \frac{z + y}{z} \implies \epsilon_z = \frac{y}{R}$$

Dalla legge di Hooke  $\sigma_z = E \epsilon_z$

$$\sigma_z = E \frac{y}{R}$$

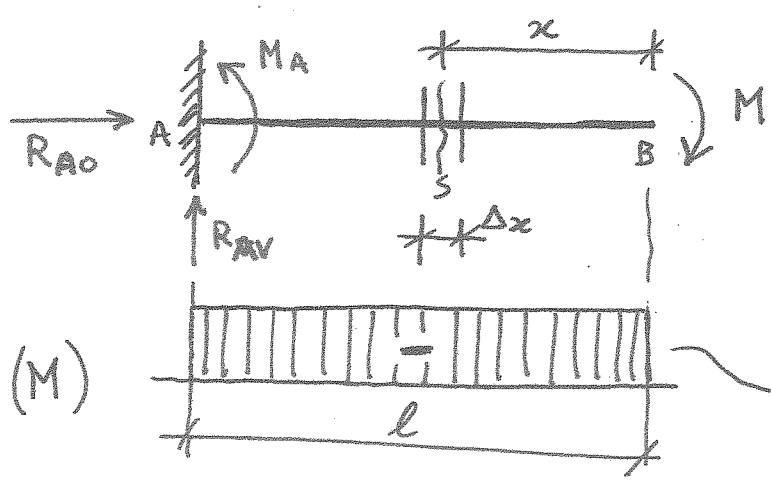
Dalla formula di Navier (flessione)  $\sigma_z = \frac{My}{J}$

$$E \frac{y}{R} = \frac{My}{J} \implies \boxed{\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}}$$



8) La deformazione per flessione nella trave a mensola

Si considera una trave a mensola soggetta ad un momento  $M$  applicato all'estremità

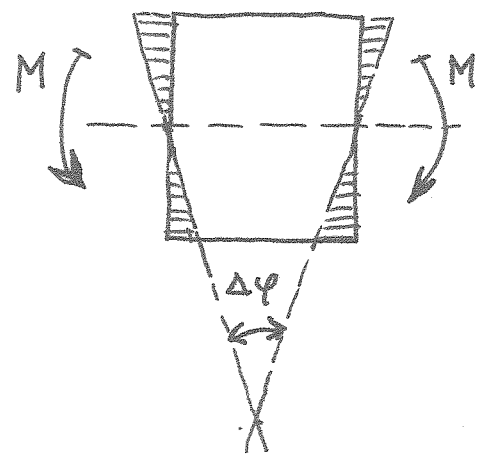
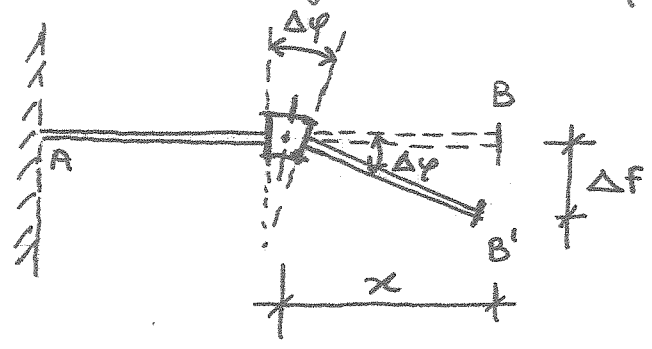


Reazioni vincolari:

$$\begin{cases} R_{AV} = 0 \\ R_{A0} = 0 \\ M_A = -M \end{cases}$$

diagramma del momento costante

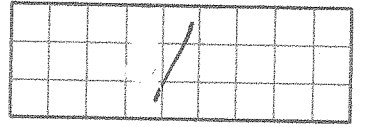
Consideriamo ora un tratto di trave di lunghezza elementare  $\Delta x$  a cavallo della sezione  $S$  posta a distanza  $x$  dall'estremo  $B$ . Supponiamo rigidi i due tratti di trave a sinistra e a destra del tratto considerato deformabile ( $R =$  raggio di curvatura)



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{R} = \frac{M}{EJ} \Delta x$$

$$\Delta F = x \sin \Delta\varphi \cong x \Delta\varphi \quad \left( \text{essendo } \Delta\varphi \text{ molto piccolo si può assumere } \sin \Delta\varphi = \Delta\varphi \right)$$

$$f = \sum \Delta F = \sum x \Delta\varphi = \sum x \frac{M \Delta x}{EJ}$$



L'abbondamento  $F$  è il momento statico di un sistema di masse del tipo  $\frac{M \Delta x}{EJ}$  rispetto ad una retta passante per il punto B e perpendicolare all'asse trave -

La risultante delle suddette masse (tre loro uguali) vale:  $\frac{Ml}{EJ}$  ed è posta a distanza  $\frac{l}{2}$  per cui:

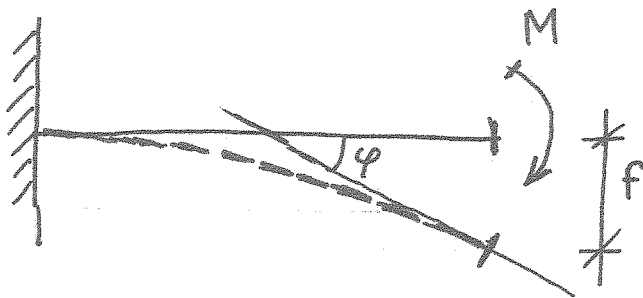
$$F = \frac{Ml}{EJ} \frac{l}{2} = \frac{Ml^2}{2EJ}$$

Analogamente:

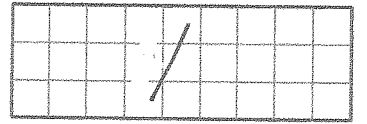
$$\varphi = \sum \Delta \varphi = \sum \frac{M \Delta x}{EJ}$$

La rotazione  $\varphi$  è la risultante di un sistema di masse del tipo  $\frac{M \Delta x}{EJ}$

$$\varphi = \frac{Ml}{EJ}$$







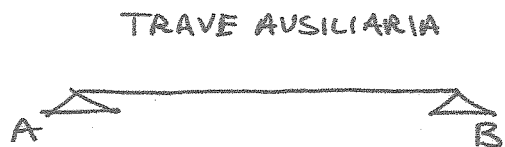
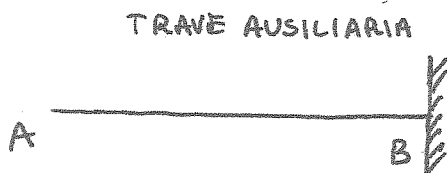
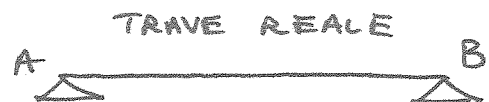
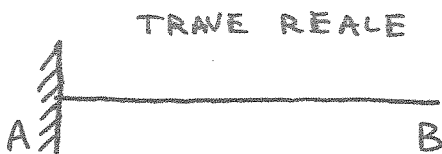
9) Le deformazioni per flessione nelle travi ipostatiche  
(Teoremi di MOHR)

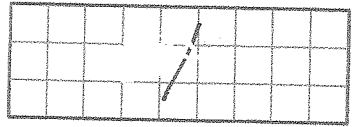
1° Teorema

Le rotazioni (in radianti) di una trave inflessa coincidono con le sollecitazioni di taglio di una trave ausiliaria caricata con un carico  $q^* = \frac{M}{EJ}$

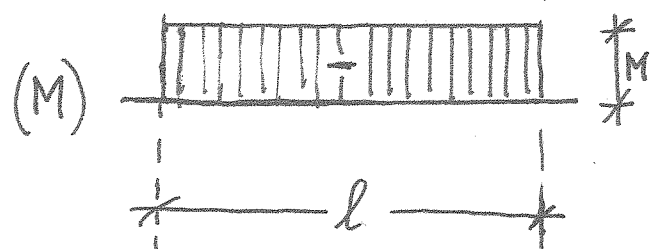
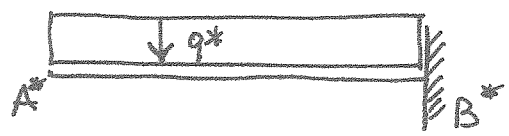
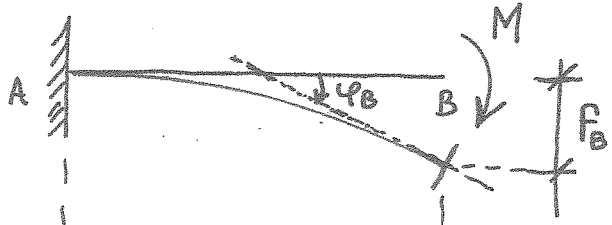
2° Teorema

Gli abbandamenti di una Trave inflessa coincidono con le sollecitazioni di momento di una trave ausiliaria caricata con un carico  $q^* = \frac{M}{EJ}$

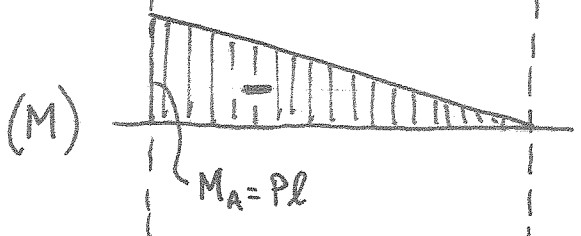
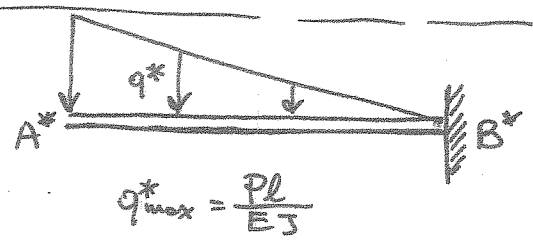
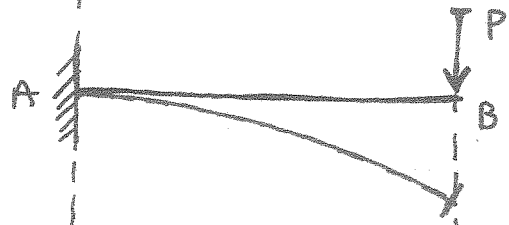




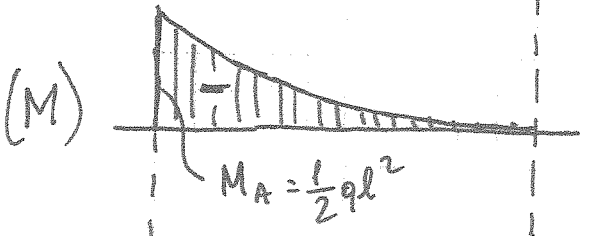
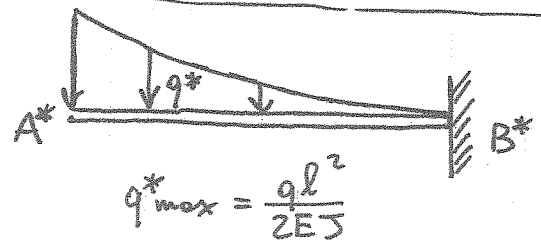
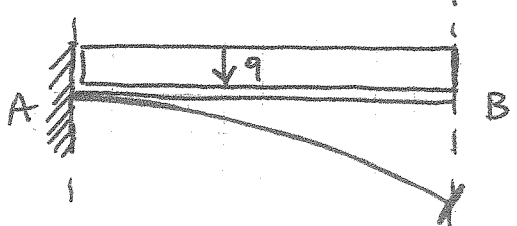
10) Applicazione dei teoremi di MOHR  $(q^* = \frac{M}{EJ})$   
 (TRAVE INCASTRATA A MENSOLO)



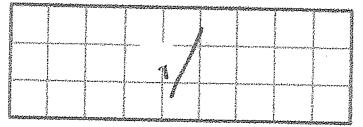
$$\begin{cases} F_B = M_B^* = \frac{Ml^2}{2EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Ml}{EJ} \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_B = M_B^* = \frac{Pl^3}{3EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Pl^2}{2EJ} \end{cases}$$

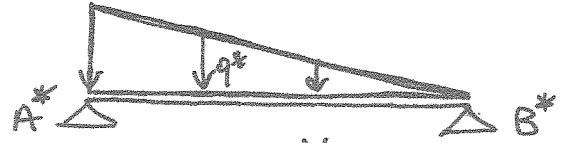
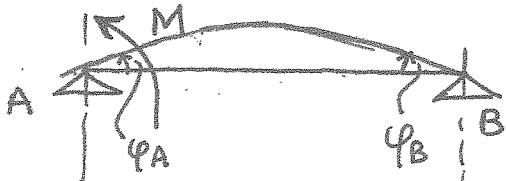


$$\begin{cases} F_B = M_B^* = \frac{ql^4}{8EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{ql^3}{6EJ} \end{cases}$$

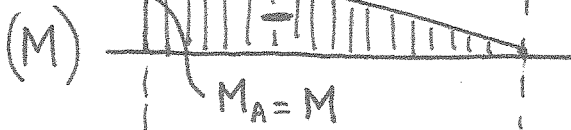


11) Applicazioni dei teoremi di MOHR  
(TRAVE APPOGGIATA)

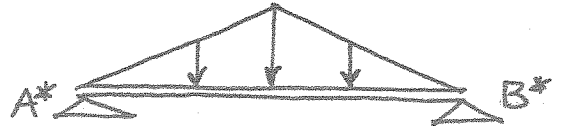
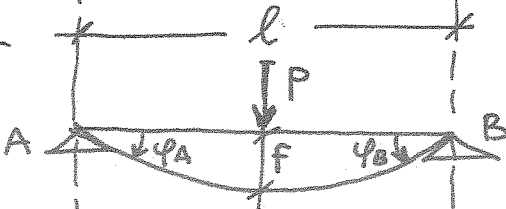
$$(q^* = \frac{M}{EJ})$$



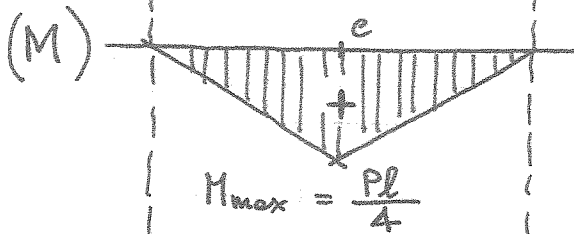
$$q^*_{max} = \frac{M}{EJ}$$



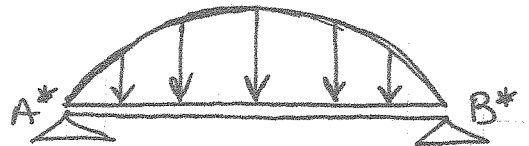
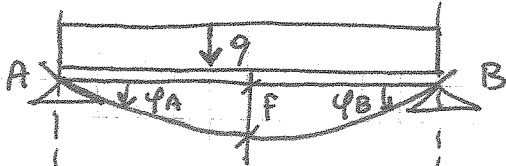
$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{Ml}{3EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Ml}{6EJ} \end{cases}$$



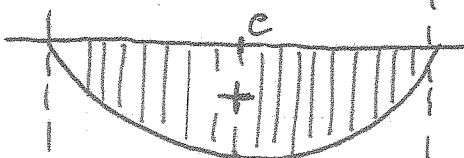
$$q^*_{max} = \frac{Pl}{4EJ}$$



$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{Pl^2}{16EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Pl^2}{16EJ} \\ F_c = M_c^* = \frac{Pl^3}{48EJ} \end{cases}$$



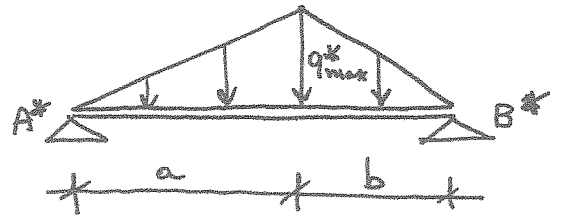
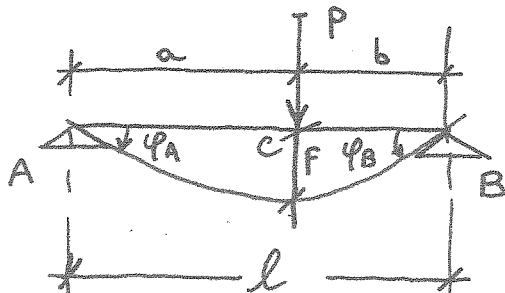
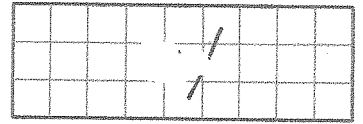
$$q^*_{max} = \frac{ql^2}{8EJ}$$



$$\varphi_A = T_A^* = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_B = T_B^* = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$F_c = M_c^* = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$



$$q_{max}^* = \frac{Pab}{lES}$$

(M)



$$M_{max} = \frac{Pb}{l} a$$

$$\text{se } a=b=\frac{l}{2} \quad M_{max} = \frac{Pl}{4}$$

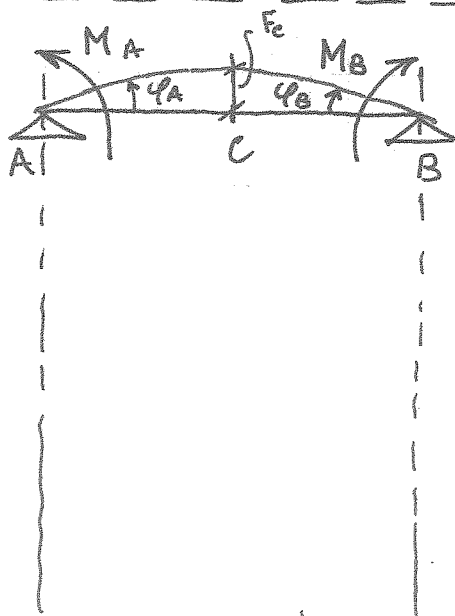
$$f_c = \frac{Pa^2b^2}{3EJl}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{Pb}{6lES} (l^2 - b^2) \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Pa}{6lES} (l^2 - a^2) \end{cases}$$

$$\text{Per } a=b=\frac{l}{2}$$

$$\varphi_A = \frac{Pl^2}{16ES}$$

$$\varphi_B = \frac{Pl^2}{16ES}$$



$$\varphi_A = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ}$$

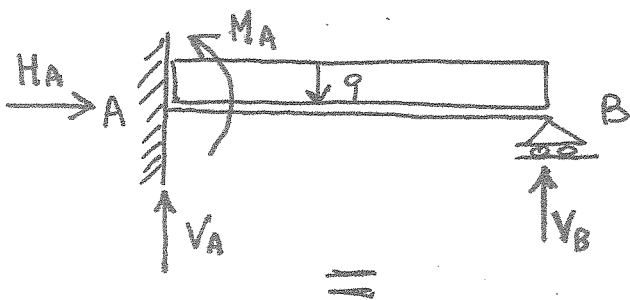
$$\varphi_B = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}$$

N.B. per  $M_A = M_B$

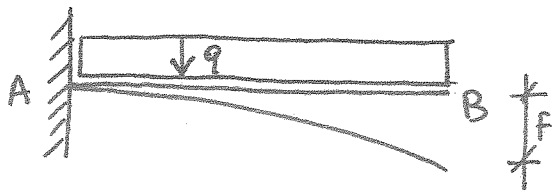
$$f_c = \frac{Ml^2}{8EJ} \quad (\text{in mezzetria})$$

12) Le strutture iperstatiche ad una campata

Trave incastata con appoggio : (carico distribuito)



4 incognite



$$f_B(q) = \frac{ql^4}{8EJ}$$

+



$$f_B(V_B) = -\frac{V_B l^3}{3EJ}$$

Supponendo che la somma delle frecce dovute ai due diversi tipi di carico risulta nulla (il punto B non può spostarsi in verticale)

$$f_B(q) + f_B(V_B) = 0$$

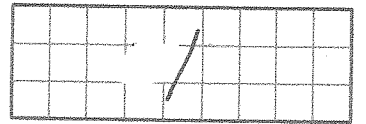
risulta:

$$\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{V_B l^3}{3EJ} = 0$$

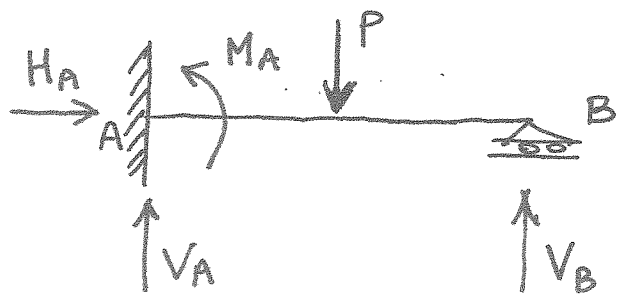
$\Rightarrow$

$$V_B = \frac{3}{8} ql$$

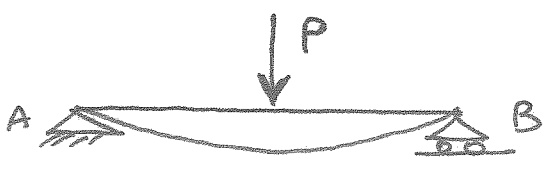
In particolare:  $M_A = \frac{1}{8} ql^2$



Trave incastata con appoggio : (carico eccentrico in flessione)

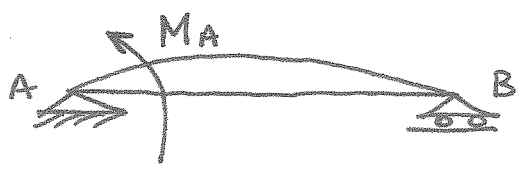


=



$$\varphi_A(P) = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

+



$$\varphi_A(M_A) = -\frac{M_A l}{3EJ}$$

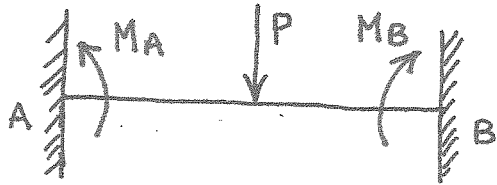
Imponendo che la somma delle rotazioni in "A" dovute ai due diversi tipi di carichi risulta nulla

$$\varphi_A(P) + \varphi_A(M) = 0$$

risulta :

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{M_A l}{3EJ} = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = \frac{3}{16} Pl}$$

Trave doppiamente incastrata : (carico concentrato in mezzo)



$$\begin{cases} \varphi_A(P) + \varphi_A(M_A + M_B) = 0 \\ \varphi_B(P) + \varphi_B(M_A + M_B) = 0 \end{cases}$$



$$\varphi_{A(P)} = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

$$\varphi_{B(P)} = \frac{Pl^2}{16EJ}$$



$$\varphi_{A(M)} = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ}$$

$$\varphi_{B(M)} = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}$$

A meno del termine  $EJ$  (sezione costante e stesso materiale)

$$\begin{cases} \frac{Pl^2}{16} - \frac{2M_A l}{6} - \frac{M_B l}{6} = 0 \\ \frac{Pl^2}{16} - \frac{M_A l}{6} - \frac{2M_B l}{6} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Pl^2}{16} = \frac{l}{6} (2M_A + M_B) \\ \frac{Pl^2}{16} = \frac{l}{6} (M_A + 2M_B) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{8} Pl = 2M_A + M_B \\ \frac{3}{8} Pl = M_A + 2M_B \end{cases}$$

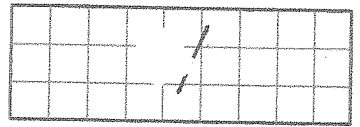
Moltiplicando la seconda equazione per due e sottraendola alla prima

risulta :  $-\frac{3}{8} Pl = 2M_A + M_B - 2M_A - 4M_B \Rightarrow M_B = \frac{Pl}{8}$

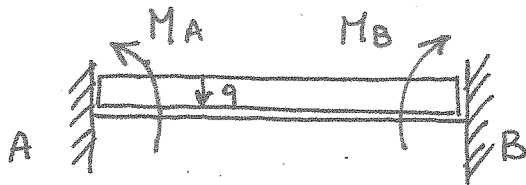
Analogamente  $\Rightarrow M_A = \frac{Pl}{8}$

In particolare  $M_{max}(\frac{l}{2}) = \frac{Pl}{8}$

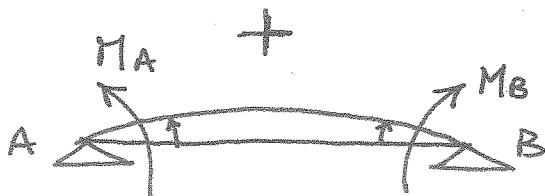
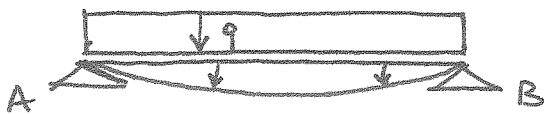
Si fa notare che  $M_A = M_B$  anche per ragioni di simmetria



Trave doppiamente incastata : (carico distribuito)



=



$$\varphi_A(q) + \varphi_A(M) = 0$$

$$\varphi_B(q) + \varphi_B(M) = 0$$

$$\varphi_A(q) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_B(q) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_A(M) = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ}$$

$$\varphi_B(M) = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}$$

A meno del termine  $EJ$  :

$$\begin{cases} \frac{ql^3}{24} - \frac{2M_A l}{6} - \frac{M_B l}{6} = 0 \\ \frac{ql^3}{24} - \frac{M_A l}{6} - \frac{2M_B l}{6} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{ql^3}{24} = \frac{l}{6} (2M_A + M_B) \\ \frac{ql^3}{24} = \frac{l}{6} (M_A + 2M_B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} ql^2 = 2M_A + M_B \\ \frac{1}{4} ql^2 = M_A + 2M_B \end{cases}$$

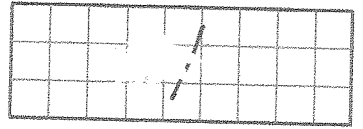
Moltiplicando la seconda equazione per due e sottraendola alla prima risulta :  $-\frac{1}{4} ql^2 = 2M_A + M_B - 2M_A - 4M_B \Rightarrow$

$$\begin{cases} M_B = \frac{ql^2}{12} \\ M_A = \frac{ql^2}{12} \end{cases}$$

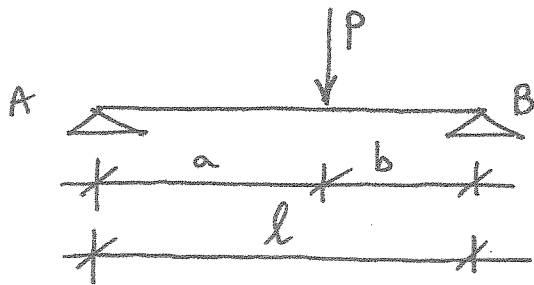
Per particolare  $M_{max}(\frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{24}$

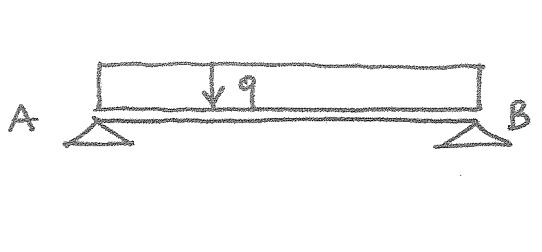
Per simmetria  $M_A = M_B$

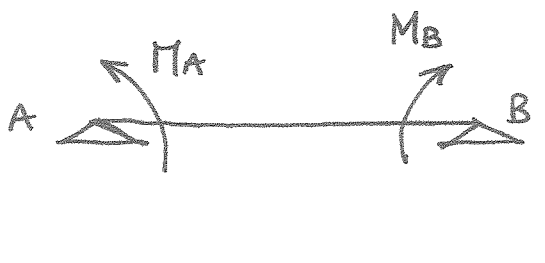




Prima di affrontare lo studio delle travi continue si riportano di seguito le formule che esprimono le rotazioni nelle travi appoggiate agli estremi nelle condizioni di carico nel seguito riportate:


$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2) \right] = \frac{A^*}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Pa}{6l} (l^2 - a^2) \right] = \frac{B^*}{EJ} \end{aligned} \right.$$

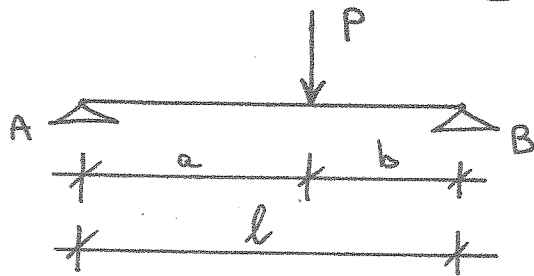

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^3}{24} \right) = \frac{A^*}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^3}{24} \right) = \frac{B^*}{EJ} \end{aligned} \right.$$


$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6} \right) = \frac{A^*}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3} \right) = \frac{B^*}{EJ} \end{aligned} \right.$$

Ricordiamo che le rotazioni nella trave reale corrispondono alle rotazioni di Taglio nella trave ausiliaria.

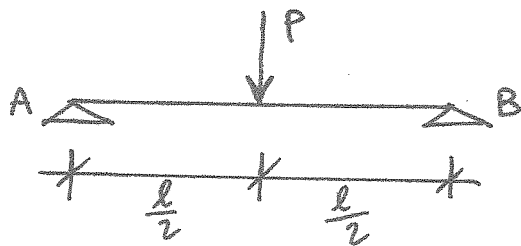
Indichiamo con  $A^*$  e  $B^*$  le reazioni fittizie della trave ausiliaria e meno del termine  $\frac{1}{EJ}$

REAZIONI FITTIZIE (Trave ausiliaria)



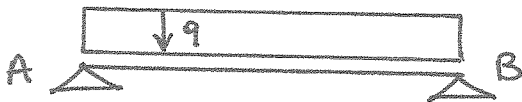
$$A^* = \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2) \quad (D_2^*)$$

$$B^* = \frac{Pa}{6l} (l^2 - a^2) \quad (D_1^*)$$



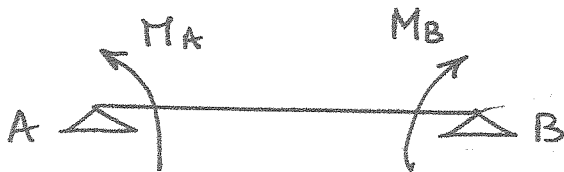
$$A^* = \frac{Pl^2}{16} \quad (D_2^*)$$

$$B^* = \frac{Pl^2}{16} \quad (D_1^*)$$



$$A^* = \frac{ql^3}{24} \quad (D_2^*)$$

$$B^* = \frac{ql^3}{24} \quad (D_1^*)$$



$$\varphi_A = \frac{l}{6EJ} (2M_A + M_B)$$

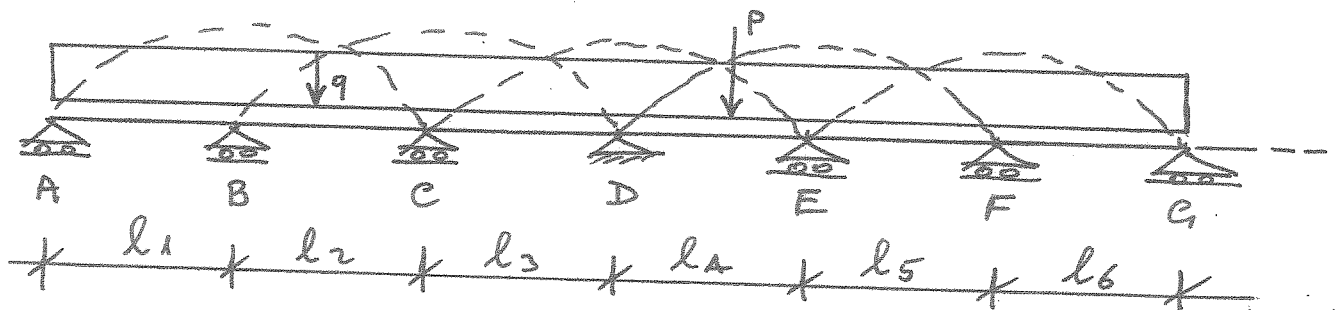
$$\varphi_B = \frac{l}{6EJ} (M_A + 2M_B)$$

13) Le travi continue (L'equazione dei tre momenti di CLAPEYRON)

$n$  = numero di appoggi

$i$  = grado di iperstaticità

$$i = n - 2$$



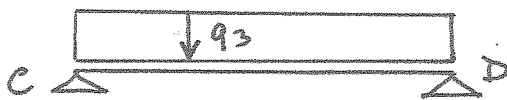
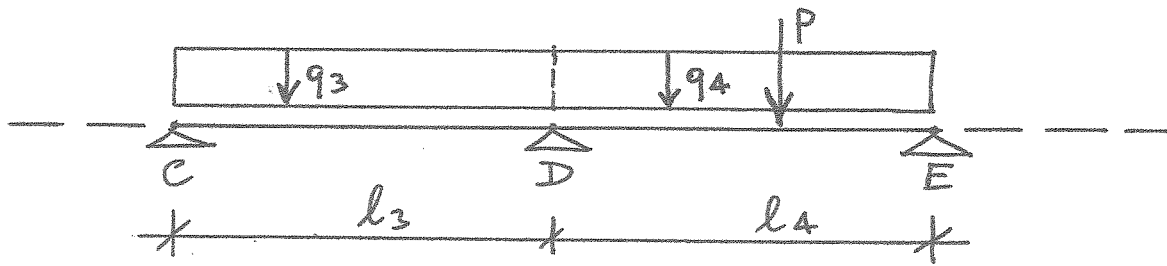
Assegnata una trave continua su  $n$  appoggi esaminiamo due campate adiacenti separate dal resto della trave e isolate fra loro:



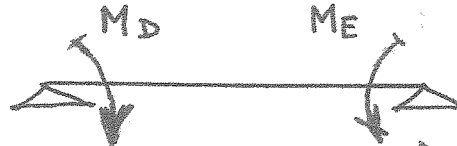
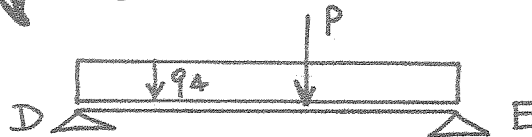
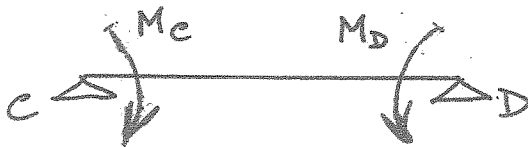
Affinché ogni campata possa essere considerata isolata dal contesto è necessario aggiungere alle estremità i momenti incogniti negli appoggi.

Per effetto della continuità la sezione terminale di ogni campata coincide con la sezione iniziale della campata adiacente e il momento nelle due sezioni deve essere uguale e unico.

Anche le rotazioni delle due sezioni sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario, perché la rotazione  $\phi_{D3}$  fa alzare la tangente mentre la  $\phi_{D4}$  la fa abbassare.



+



$D_1^*$  } rotazioni (a meno termine  $ES$ )  
 } nell'appoggio D, per la trave a  
 $D_2^*$  } sinistra e quella a destra,  
 } per effetto dei carichi

(Consideriamo le rotazioni verso il basso positive)

$$\varphi_{D_s} = \frac{D_1^*}{ES} + \frac{l_3}{6ES} (M_C + 2M_D)$$

$$\varphi_{D_s} = -\varphi_{D_d}$$

$$\varphi_{D_d} = \frac{D_2^*}{ES} + \frac{l_4}{6ES} (2M_D + M_E)$$

Considerando  $S$  costante per tutta la trave risulta

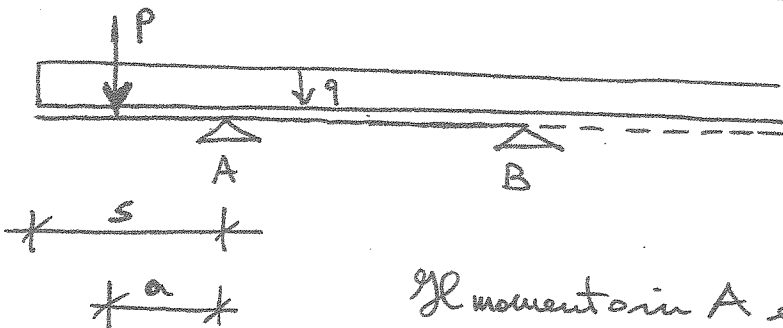
$$D_1^* + \frac{l_3}{6} (M_C + 2M_D) = -D_2^* - \frac{l_4}{6} (2M_D + M_E)$$

$$6D_1^* + l_3 (M_C + 2M_D) = -6D_2^* - l_4 (2M_D + M_E)$$

$$M_C l_3 + 2M_D (l_3 + l_4) + M_E l_4 = -6 (D_1^* + D_2^*)$$

EQUAZIONE DEI TRE MOMENTI  
 DI CLAPEYRON

CASI PARTICOLARI ALLE ESTREMITA' di una trave continua

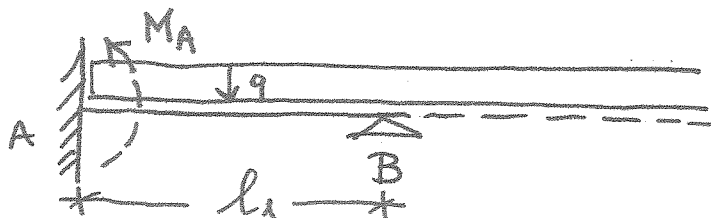
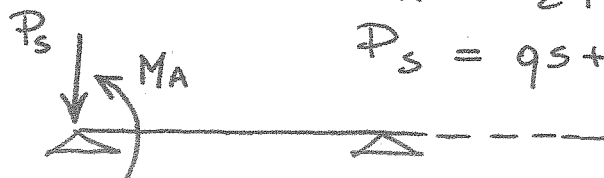


(sbalzo all'estremita')

Il momento in A è un termine noto

$$M_A = -\frac{1}{2}qs^2 - Pa$$

$$P_s = qs + P$$



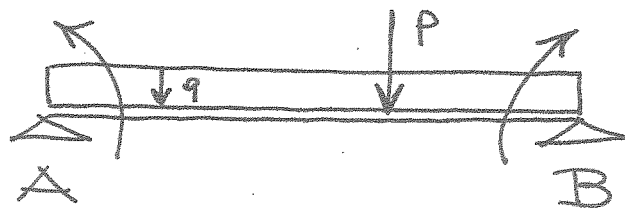
(incastro all'estremita')

L'ulteriore equazione da introdurre per determinare l'incognita  $M_A$  è quella che corrisponde all'annullamento della rotazione nel punto A essendo la sezione incastata

$$\varphi_{A1} = \frac{A_2^*}{EJ} + \frac{l_1}{6EJ} (2M_A + M_B) = 0$$

$$2M_A l_1 + M_B l_1 = -6A_2^*$$

Determinati i valori delle incognite iperstatiche ( $M$ ) si analizzano le singole campate appoggiate-appoggiate con i momenti alle estremità determinati -



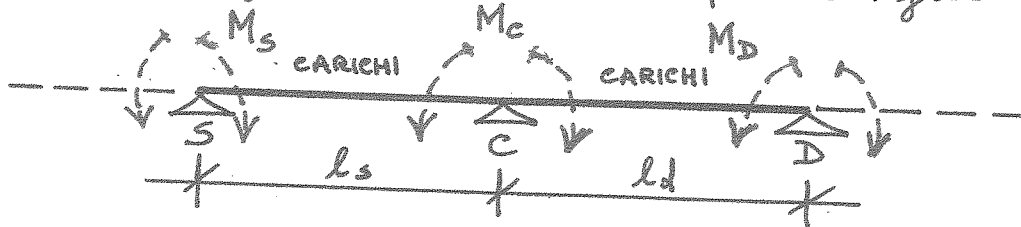
Per ogni campata si determinano :

- 1) Le reazioni verticali in A e B
- 2) La sezione di Taglio nullo dove il Momento è max
- 3) Le sezioni di Momento nullo
- 4) Il diagramma delle sollecitazioni di TAGLIO
- 5) " " " " " " MOMENTO

TRAVI CONTINUE

(EQUAZIONE DEI 3 MOMENTI DI CLAPEYRON)

Si consideri la generica coppia di campate contigue



S = appoggio a sinistra

C = appoggio centrale

D = appoggio a destra

$l_s$  = luce campata a sinistra

$l_d$  = luce campata a destra

$$M_s l_s + 2 M_c (l_s + l_d) + M_d l_d = -6 (R_1^* + R_2^*)$$

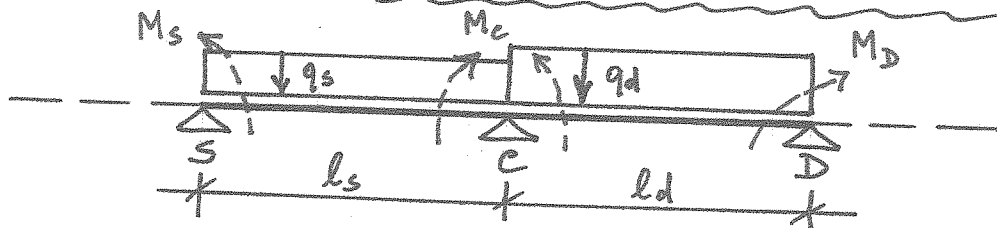
$R_1^*$  = rotazione sull'appoggio centrale C per la trave a sinistra

$R_2^*$  = rotazione sull'appoggio centrale C per la trave a destra

} per effetto dei carichi sulla campata e meno del termine  $EJ$

N.B. : L'equazione nella formulazione su riportata è valida per trave continua a sezione costante e dello stesso materiale

Il risultato negativo sta ad indicare che il verso del momento è opposto a quello ipotizzato



Nell'ipotesi di carichi sulle campate del tipo uniformemente distribuito l'equazione dei 3 momenti assume la seguente formulazione semplificata:

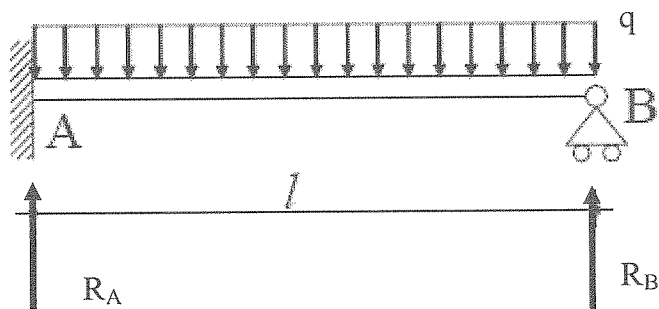
$$8 M_c (l_s + l_d) = q_s l_s^3 + q_d l_d^3 - 4 M_s l_s - 4 M_d l_d$$

## 6. SISTEMI DI TRAVI IPERSTATICHE

Si consideri la trave in figura. Essa è una volta iperstatica infatti  $3t-s=3-4=-1$ , infatti l'incastro elimina 3 g.d.l. mentre il carrello ne elimina uno ulteriore.

Non è possibile calcolare le reazioni vincolari sulla base di sole condizioni di equilibrio, ossia applicando direttamente le equazioni cardinali della statica, in quanto il numero di incognite è maggiore del numero di equazioni di equilibrio a disposizione.

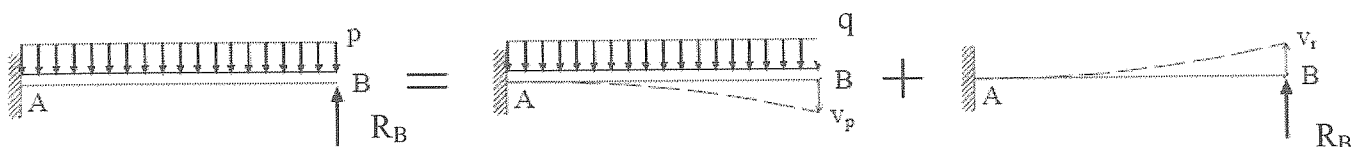
Infatti come reazioni vincolari avremo un coppia in A, una reazione verticale in A e una reazione verticale in B: 3 incognite a fronte di 2 equazioni.



Sarà pertanto necessario considerare anche equazioni di congruenza utilizzando il **metodo delle forze** che consiste, in generale, nel sostituire i vincoli sovrabbondanti con le rispettive reazioni vincolari.

In questo caso, ad esempio, il carrello in B può essere sostituito con la corrispondente reazione vincolare  $R_{yB}$ , assunta come incognita iperstatica. Il sistema così torna ad essere isostatico sebbene, oltre ad essere sottoposto ad un carico distribuito noto è soggetto anche ad una forza concentrata in B il cui valore è sconosciuto.

Tramite il principio di sovrapposizione degli effetti, la mensola riportata in figura può essere considerata come il risultato della somma di due mensole diversamente caricate: la prima con il carico distribuito noto, la seconda con il carico concentrato incognito.



Sfruttando gli schemi con freccia nota sopra riportati si avrà

$$V_p = \frac{ql^4}{8EI} \quad \text{e} \quad V_r = -\frac{R_B l^3}{3EI}$$

Per la congruenza con il vincolo in B, che non consente spostamenti diversi da 0, si deve imporre:

$$V_p + V_r = 0$$

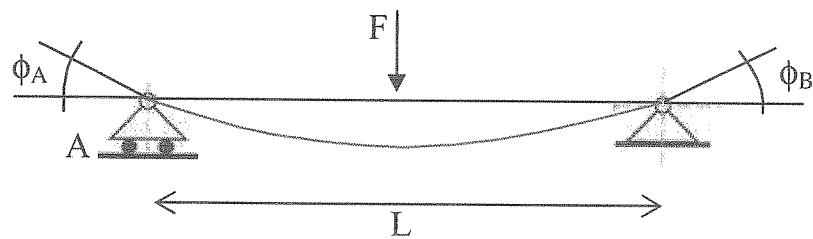
e risolvendo rispetto a  $R_B$  si ottiene:

$$R_B = \frac{3}{8} ql$$

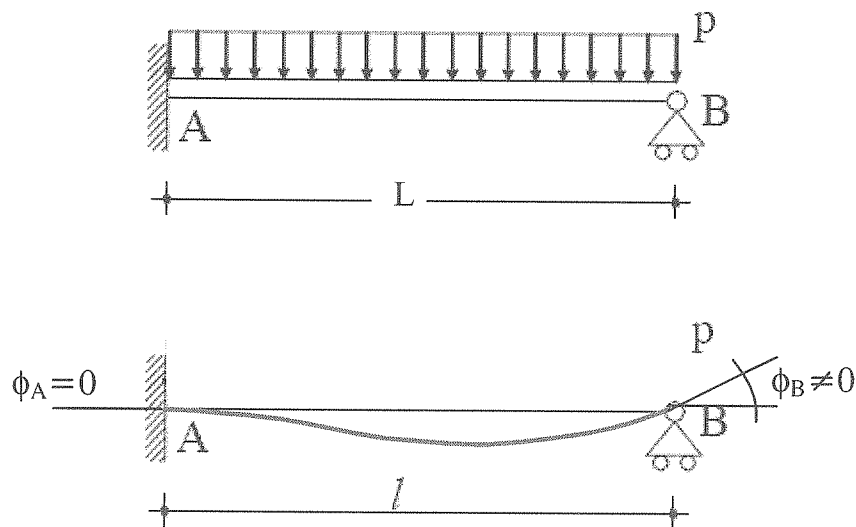
Nota questa reazione vincolare si ritorna di fatto ad un sistema isostatico (trave semplicemente incastrata) con un carico uniformemente distribuito ed una forza concentrata. Si possono così



Prendendo in considerazione la trave doppiamente appoggiata riportata sopra si nota che sia il carrello che la cerniera consentono delle rotazioni  $\phi_A$  e  $\phi_B$  diverse da zero. La distribuzione dei carichi è simmetrica rispetto ad un'asse verticale che taglia in due la trave e pertanto anche la deformata dovrà essere in tal senso simmetrica. Infine dalla teoria della linea elastica sappiamo che la deformata deve essere una parabola di ordine 3. Utilizzando tutte queste considerazioni risulta immediato tracciare la deformata come si vede sotto.



Consideriamo un caso di struttura iperstatica ossia una trave incastrata ed appoggiata come di seguito. Sappiamo che l'incastro non permette spostamenti né rotazioni quindi la tangente alla deformata in A deve rimanere parallela all'asse (A-B) della trave, quindi orizzontale. In B il carrello consente rotazioni ma non abbassamenti. Infine in presenza di carichi distribuiti la deformata è una parabola di ordine 4. Ne deriva la deforma disegnata in rosso.

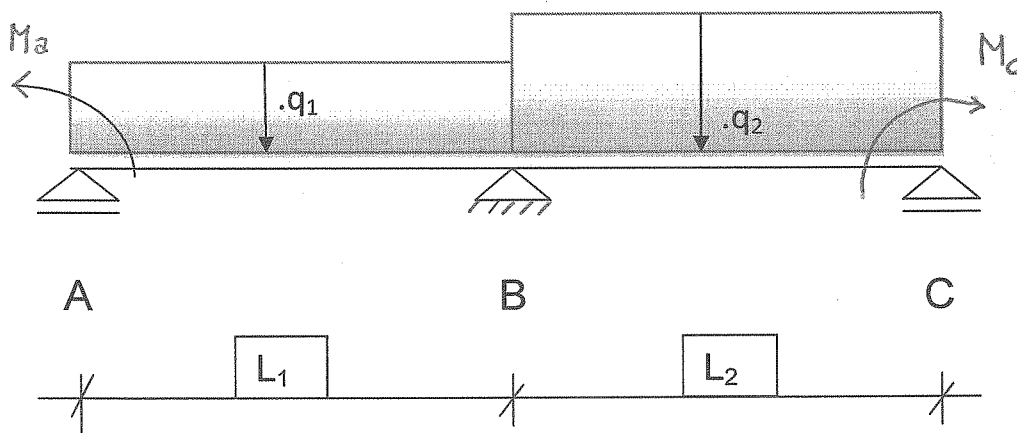


Allievo

data

Progettare la trave di seguito riportata ipotizzando di utilizzare due diversi materiali:

- LEGNO  $\sigma_{amm} = 60 \text{ daN/cm}^2$   
 $T_{amm} = 7 \text{ daN/cm}^2$
- ACCIAIO  $\sigma_{amm} = 1900 \text{ daN/cm}^2$



$q_1 = 3000 \text{ daN/m}$

$L_1 = 4,80 \text{ m}$

$M_a = 1680 \text{ daNm}$

$q_2 = 3500 \text{ daN/m}$

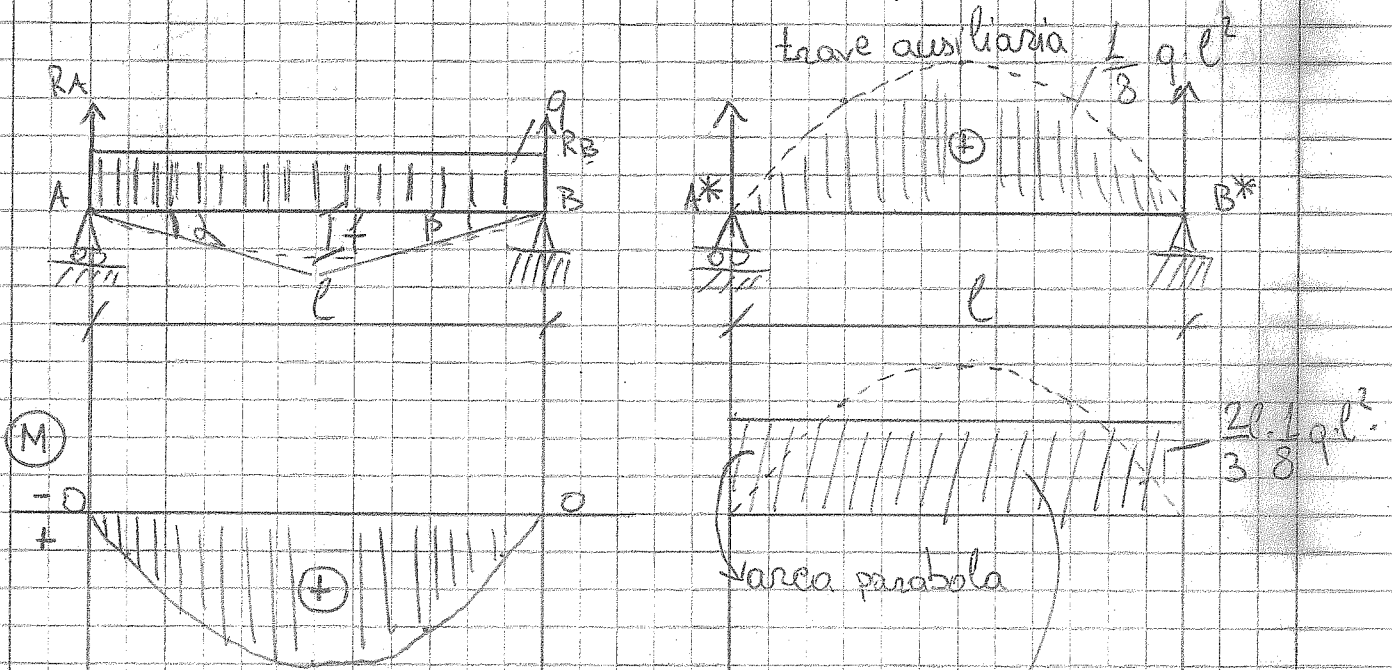
$L_2 = 4,30 \text{ m}$

$M_c = 2150 \text{ daNm}$

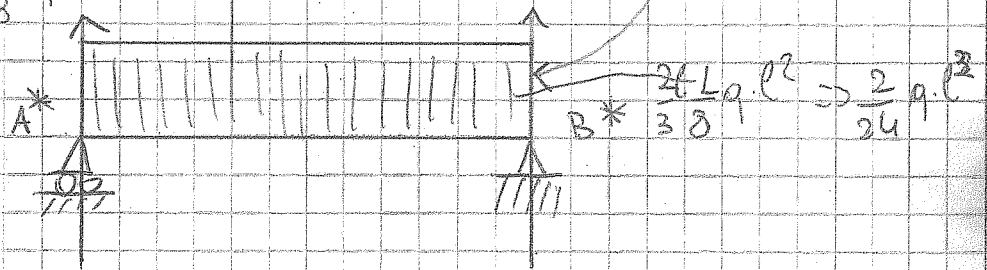
4<sup>av</sup> B SETTEMBRE 2014

MOHR

1° e 2° teorema di Mohr MOHR



$$M_{max} = \frac{1}{8} q l^2$$



$$A^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{24} q l^3 \Rightarrow \frac{1}{24} q l^3$$

freccia  $B^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{24} q l^3 \Rightarrow \frac{1}{24} q l^3$

$$f = \frac{M^*}{EI}$$

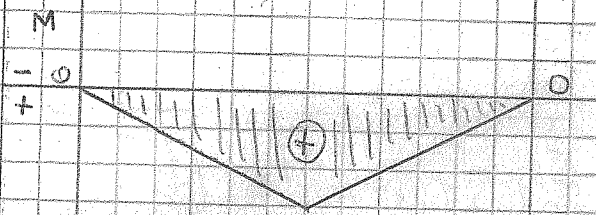
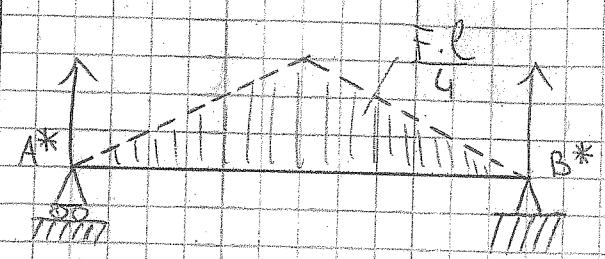
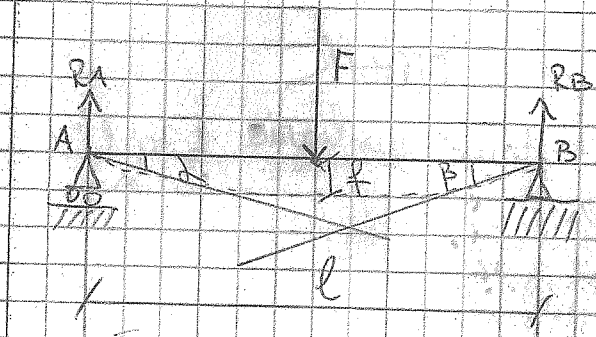
$M^*$  momento trave ausiliaria  
 $EI$  modulo di elasticità

$$M^* = A^* \cdot \frac{l}{2} - \frac{2}{24} q l^3 \cdot \frac{l}{4}$$

$$\alpha = \frac{A^*}{EI} \text{ (rad)} \Rightarrow \alpha = \frac{q l^3}{24 EI}$$

$$\beta = \frac{B^*}{EI} \text{ (rad)} \Rightarrow \beta = \frac{q l^3}{24 EI}$$

1° COROLLARIO DI MOHR



$$A^* = \frac{l}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{F \cdot l^2}{16}$$

$$B^* = \frac{l}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{F \cdot l^2}{16}$$

$$R_A = F/2 \quad R_B = F/2$$

$$M = R_A \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{F \cdot l}{2} \Rightarrow \frac{F \cdot l}{4}$$

$$\alpha = \frac{A^*}{E \cdot I} \text{ (rad)}$$

$$\beta = \frac{B^*}{E \cdot I} \text{ (rad)}$$

2° COROLLARIO DI MOHR

$$\varphi = \frac{M^*}{E \cdot I}$$

$$\alpha = \frac{A^*}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{F \cdot l^2}{16 E \cdot I} \quad \beta = \frac{B^*}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{F \cdot l^2}{16 E \cdot I}$$

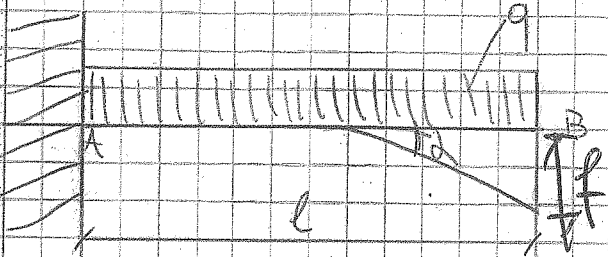
$$M^* = A^* \cdot \frac{l}{2} - \frac{F \cdot l^3}{96} =$$

$$= \frac{F \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{F \cdot l^3}{96} \Rightarrow \frac{F \cdot l^3}{32} - \frac{F \cdot l^3}{96}$$

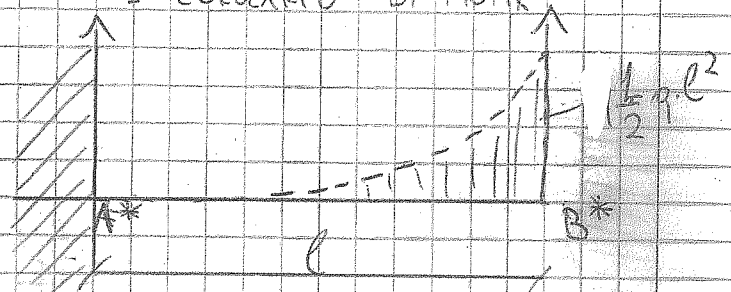
$$\frac{3F \cdot l^3 - F \cdot l^3}{96} = \frac{2F \cdot l^3}{96}$$

$$= \frac{F \cdot l^3}{48}$$

$$\varphi = \frac{\frac{1}{48} F \cdot l^3}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{F \cdot l^3}{48 E \cdot I}$$



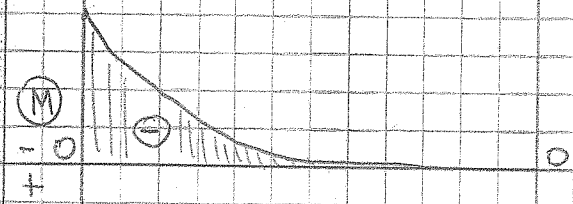
1° COROLLARIO DI MOHR



$$A^* = \frac{q \cdot l^2}{2} + \frac{2l}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} =$$

$$= \frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^2}{3} =$$

$$= \frac{3q \cdot l^2 - 2q \cdot l^2}{6} = \frac{q \cdot l^2}{6}$$



$$M_A = +q \cdot l \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} q \cdot l^2$$

$$2B = \frac{A^*}{EI} = \frac{q \cdot l^3}{6EI}$$

2° COROLLARIO DI MOHR

$$f = \frac{M^*}{EI}$$

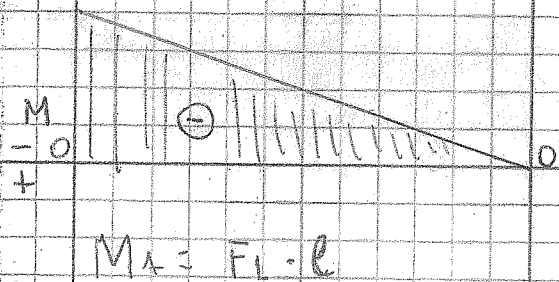
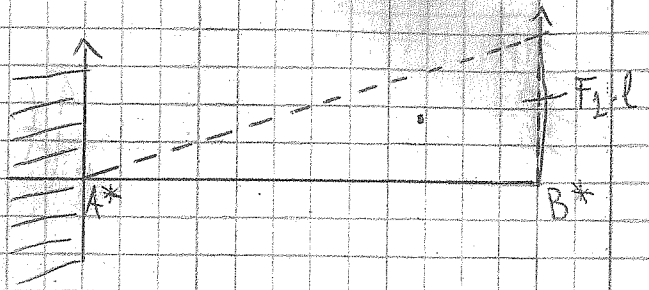
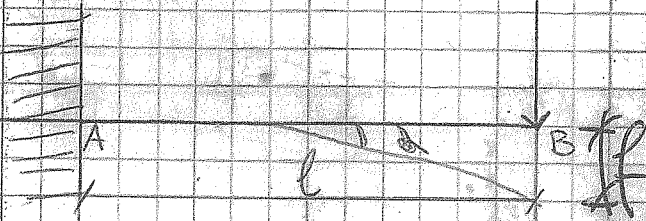
$$M^* = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot 2} \cdot \frac{3l}{4} =$$

$$= \frac{q \cdot l^4}{8}$$

$$f = \frac{q \cdot l^4}{8EI}$$

$$f = \frac{1}{8} \frac{q \cdot l^4}{EI}$$

1° COROLARIO DI MOHR



$$A^* = F \cdot l \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{F \cdot l \cdot l}{2} = \frac{F \cdot l^2}{2}$$

$$\Delta_B = \frac{A^*}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot I}$$

2° COROLARIO DI MOHR

$$f = \frac{M^*}{E \cdot I}$$

$$M^* = \frac{1}{2} F \cdot l^2 \cdot \frac{2}{3} l$$

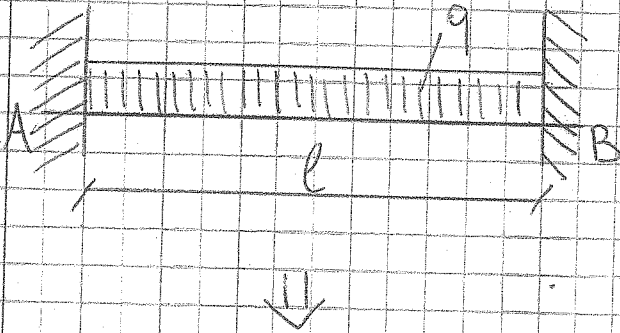
$$= \frac{F \cdot l^3}{3}$$

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot I}$$

$$f = \frac{1}{3} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I}$$

01/10/2014

TRAVI IPERSTATICHE

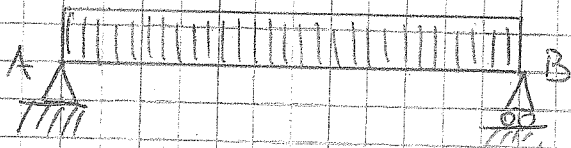


$$\Delta_A = 0$$

$$\Delta_B = 0$$

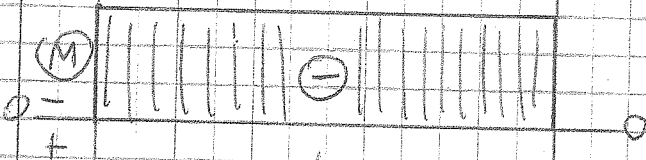
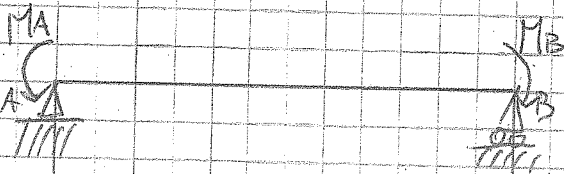
$$R_A = 0$$

$$R_B = 0$$



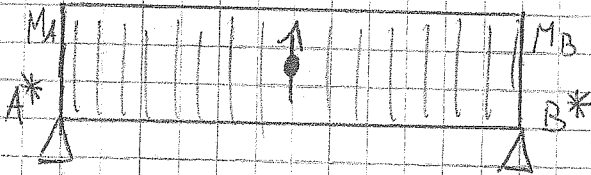
$$\Delta_A = \frac{A^*}{EI} \Rightarrow \frac{1}{24} \frac{q \cdot l^3}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{B^*}{EI} \Rightarrow \frac{1}{24} \frac{q \cdot l^3}{EI}$$



$$A^* = \frac{M_A \cdot l}{2}$$

$$B^* = \frac{M_B \cdot l}{2}$$



$$M_{\max}(l/2) = -M_A + R_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}$$

$$= -\frac{1}{12} q \cdot l^2 + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4}$$

$$= \frac{1}{12} q \cdot l^2 + \frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$\frac{-2q \cdot l^2 + 6q \cdot l^2 - 3q \cdot l^2}{24}$$

$$= \frac{q \cdot l^2}{24}$$

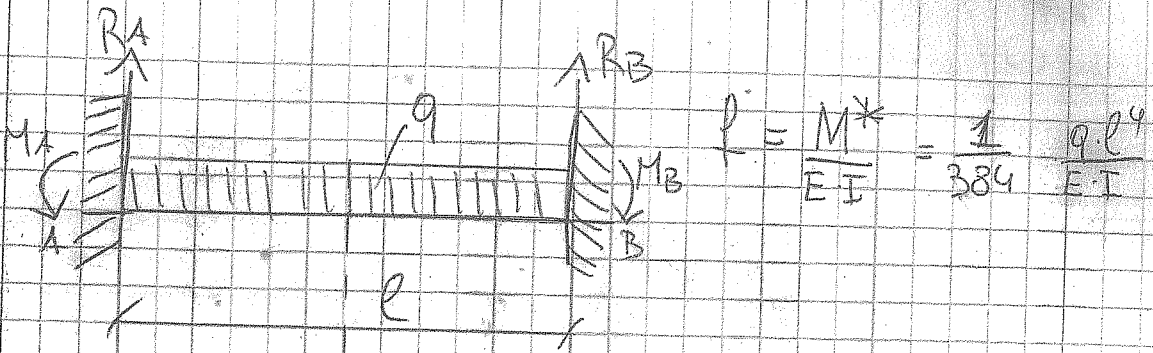
$$\Delta_A = \frac{A^*}{EI} \Rightarrow \frac{M_A \cdot l}{2EI}$$

$$\Delta_B = \frac{B^*}{EI} \Rightarrow \frac{M_B \cdot l}{2EI}$$

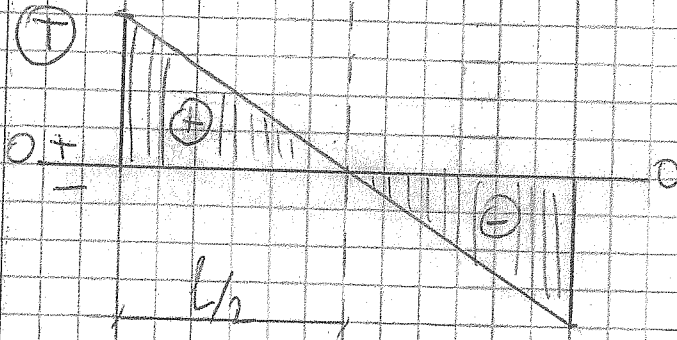
$$\frac{1}{24} \frac{q \cdot l^3}{EI} - \frac{1}{2} \frac{M_A \cdot l}{EI} = 0$$

$$M_A = \frac{2 \cdot q \cdot l^3}{l \cdot 24 \cdot 2} \Rightarrow M_A = \frac{q \cdot l^2}{12}$$

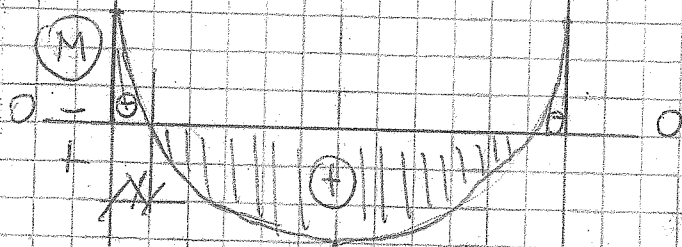
$$\frac{1}{24} q \cdot l^3 - \frac{1}{2} M_B \cdot l = 0$$



$$f = \frac{M^*}{EI} = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EI}$$



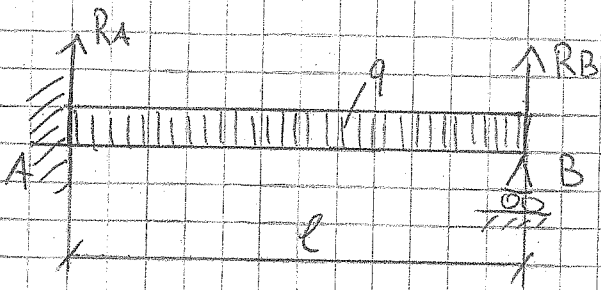
$$T(l/2) = R_A - q \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} = 0$$



$$M(x) = M_A + R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$x = 0,211 l$$





$$\Delta_A = 0$$

$$\Delta_B \neq 0$$

$$f_A = 0 \quad f_B = 0$$

$$f_{B_{\text{unif}}} + f_{B_{\text{conc}}} = 0$$

$$\frac{q \cdot l^4}{8EI} - \frac{R_B \cdot l^3}{3EI} = 0$$

$$\frac{3q \cdot l^4 - 8R_B \cdot l^3}{24EI} = 0$$

$$3q \cdot l^4 - 8R_B \cdot l^3 = 0$$

$$+ R_B = \frac{3q \cdot l^4}{8 \cdot l^3}$$

$$R_B = \frac{3q \cdot l}{8}$$

$$f = \frac{1}{8} \frac{q \cdot l^4}{EI} = \frac{q \cdot l^4}{8EI}$$

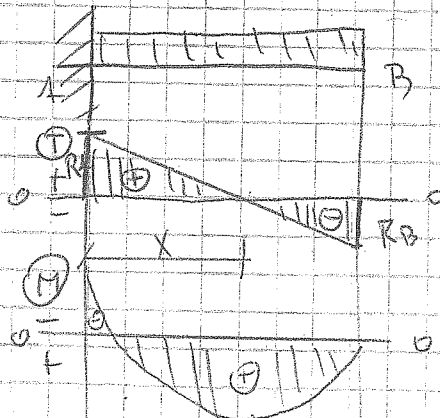
$$f = \frac{1}{3} \frac{R_B \cdot l^3}{EI} \Rightarrow \frac{R_B \cdot l^3}{3EI}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - q \cdot l + \frac{3}{8} q \cdot l = 0$$

$$R_A = q \cdot l - \frac{3}{8} q \cdot l \Rightarrow \frac{8q \cdot l - 3q \cdot l}{8} = \frac{5}{8} q \cdot l$$

$$M_B = 0$$

$$M = \frac{1}{8} q \cdot l^2$$



$$T_x = 0$$

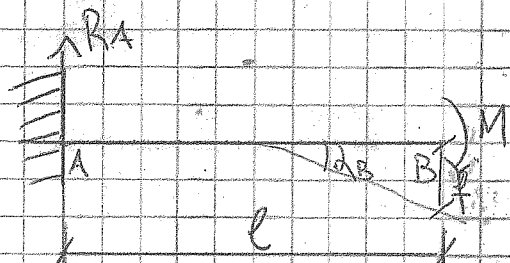
$$T_x = R_A - q \cdot l$$

$$R_A - q \cdot x = 0$$

$$x = \frac{R}{q} = \frac{\frac{5}{8} q \cdot l}{q} = \frac{5}{8} l$$

04/10/2014

180 | I PE 180



$$M = 20 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$l = 7 \text{ m}$$

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$I = 1317 \text{ cm}^4$$

$$R_B = ?$$

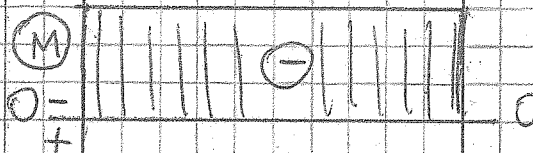
$$q = ?$$

$$M = F \cdot l$$

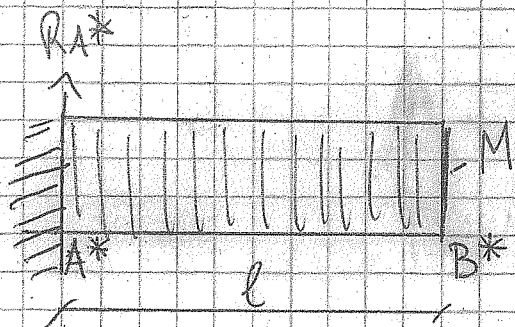
$$F = \frac{M}{l}$$

$$F = \frac{20 \text{ KN}\cdot\text{m}}{7 \text{ m}} = 2,86 \text{ KN}$$

$$R_A = F \Rightarrow 2,86 \text{ KN}$$



$$M_A = M$$



$$M^* = M \cdot l \Rightarrow 20 \cdot 7 = 140 \text{ KN}\cdot\text{m}^2$$

$$M^* = R_A^* \cdot 0 + M \cdot l \cdot \frac{l}{2} =$$

$$= 0 + 20 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} = 490 \text{ KN}\cdot\text{m}^2$$

$$\alpha = \frac{M^*}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{140 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{210\,000 \cdot 1317 \cdot 10^4} = \frac{140 \cdot 10^3}{210 \cdot 1317} = 0,050620036^{\text{rad}}$$

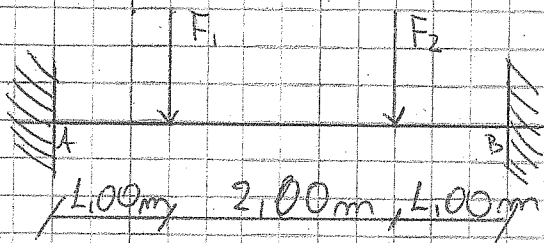
$$2^\circ 54' 01''$$

$$f = \frac{M^*}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{M \cdot l^2}{2E \cdot I}$$

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 7^2}{210\,000 \cdot 1317 \cdot 10^4} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 7^2}{2 \cdot 21 \cdot 1317} = 253,25,31$$

95

04/10/2014



$$F_1 = 30 \text{ KN}$$

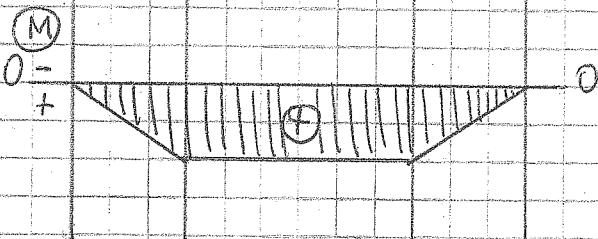
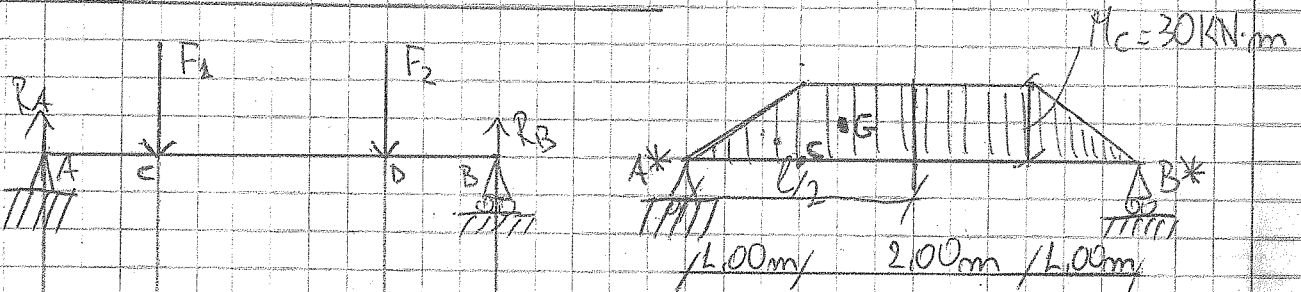
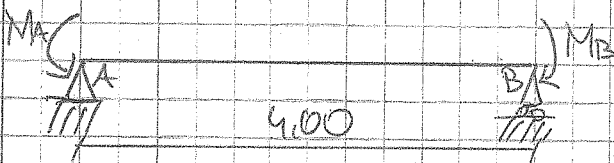
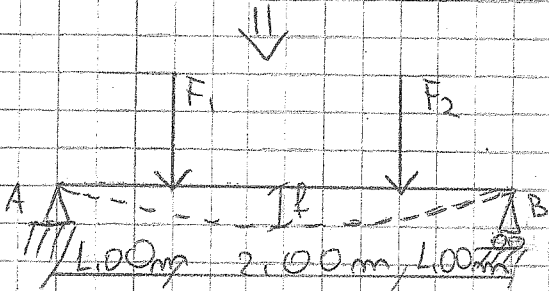
$$F_2 = 30 \text{ KN}$$

$$M = ?$$

$$R_A = F_1 \Rightarrow 30 \text{ KN}$$

$$R_B = F_2 \Rightarrow 30 \text{ KN}$$

$$R_A = R_B$$



$$\text{Superficie} = \frac{(4 \text{ m} + 2 \text{ m}) \cdot 30 \text{ KN} \cdot \text{m}}{2} = 90 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

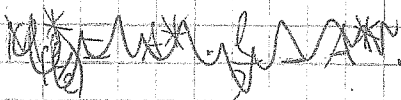
$$M_c = F_1 \cdot l \Rightarrow 30 \text{ KN} \cdot 1 \text{ m} = 30 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$A^* = \frac{90}{2} = 45 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

$$B^* = \frac{90}{2} = 45 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

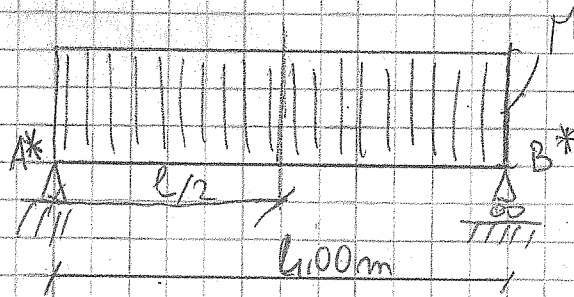
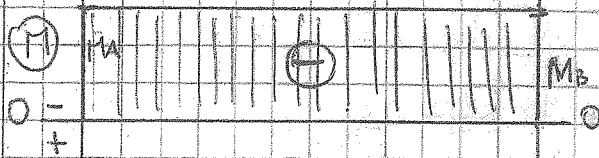
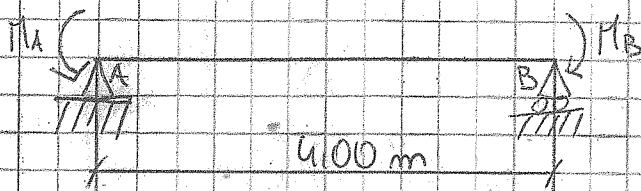
$$\alpha_A = \frac{A^*}{E \cdot I} \quad \theta = \frac{M^*}{E \cdot I}$$

$$\alpha_B = \frac{B^*}{E \cdot I}$$



$$M_c^* = A^* \cdot l - A^* \cdot \frac{1}{3} \cdot l = 45 - 15 = 30 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

96



$$A^* = \frac{M \cdot l}{2} \Rightarrow B^* = \frac{M \cdot l}{2}$$

$$\Delta_A = \frac{A^*}{E \cdot I} \quad \Delta_B = \frac{B^*}{E \cdot I}$$

$$\frac{f}{l} = \frac{M^*}{E \cdot I} \quad M^*_{(l/2)} = A^* \cdot \frac{l}{2} - A^* \cdot \frac{l}{4} =$$

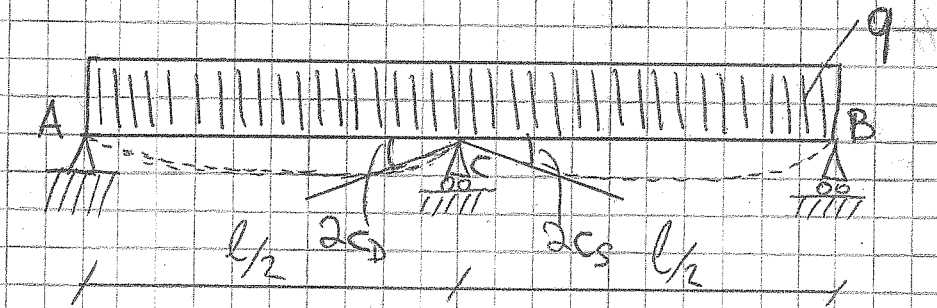
$$= \frac{M \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{M \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4}$$

$$= \frac{M \cdot l^2}{4} - \frac{M \cdot l^2}{8} = \frac{2Ml^2 - Ml^2}{8}$$

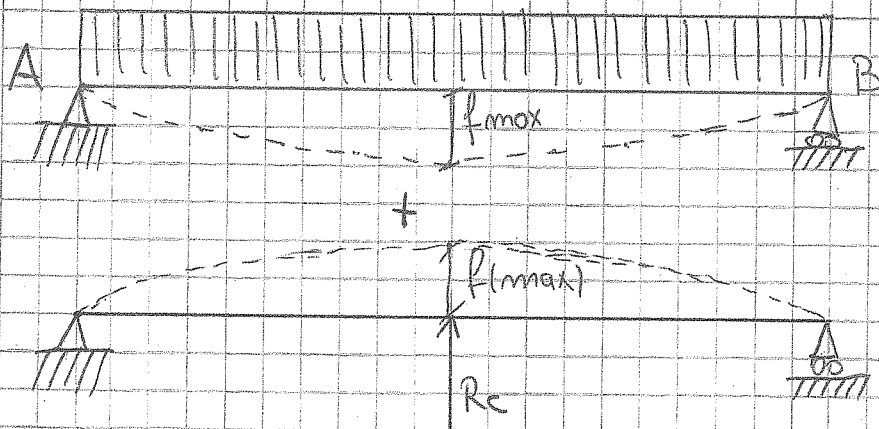
$$= \frac{M \cdot l^2}{8}$$

08/10/2014

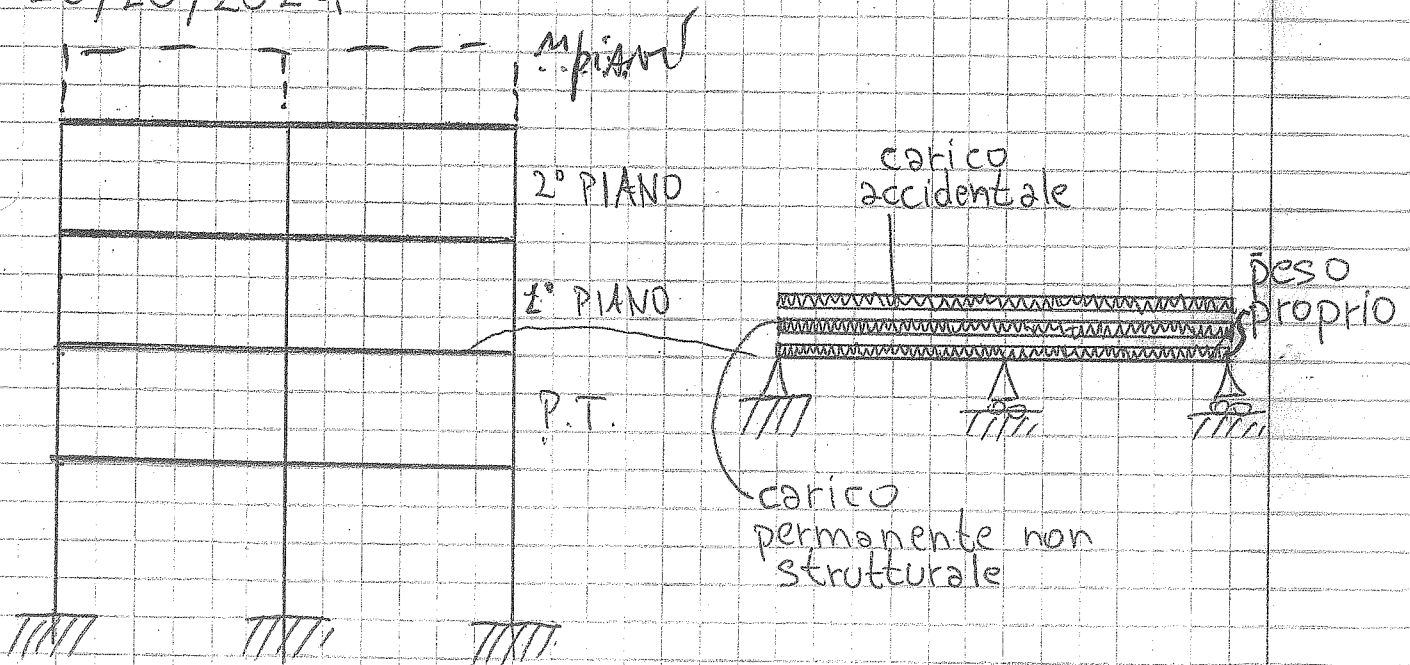
# TRAVI CONTINUE



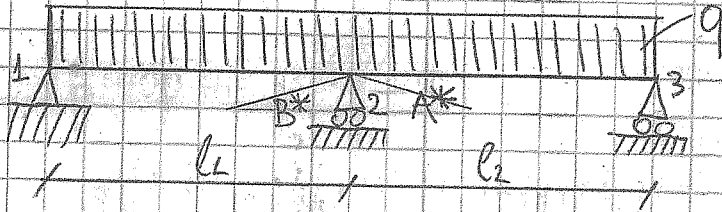
$$2c_d = 2c_s \quad f_c = 0$$



10/10/2014



15/10/2014



$$B^* = \frac{1}{24} q \cdot l^3$$

$$A^* = \frac{1}{24} q \cdot l^3$$

$$M_1 \cdot l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -6(B^* + A^*)$$

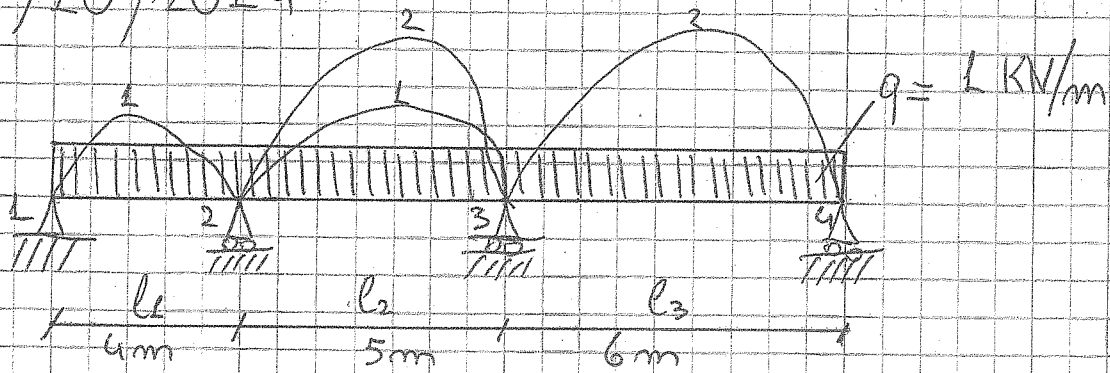
$$0 + 2M_2(l_1 + l_2) + 0 = -6\left(\frac{1}{24} q \cdot l^3 + \frac{1}{24} q \cdot l^3\right)$$

$$2M_2(l_1 + l_2) = -\frac{1}{4} q \cdot l^3 - \frac{1}{4} q \cdot l^3$$

$$2M_2(l_1 + l_2) = -\frac{1}{2} q \cdot l^3$$

$$M_2 = \frac{-\frac{1}{2} q \cdot l^3}{2(l_1 + l_2)}$$

17/10/2014



$$1) M_1 \cdot l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -6(B^* + A^*)$$

$$0 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{4}q \cdot l_1^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_2^3$$

$$2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{4}q \cdot l_1^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_2^3$$

$$2) M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + M_4 \cdot l_3 = -\frac{1}{4}q \cdot l_2^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_3^3$$

$$M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + 0 = -\frac{1}{4}q \cdot l_2^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_3^3$$

$$\rightarrow 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{4}q \cdot l_1^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_2^3$$

$$\rightarrow M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) = -\frac{1}{4}q \cdot l_2^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_3^3$$

$$\begin{cases} 2M_2(4+5) + M_3 \cdot 5 = -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 5^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 \cdot 5 + 2M_3(5+6) = -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 5^3 - \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 6^3 \end{cases}$$

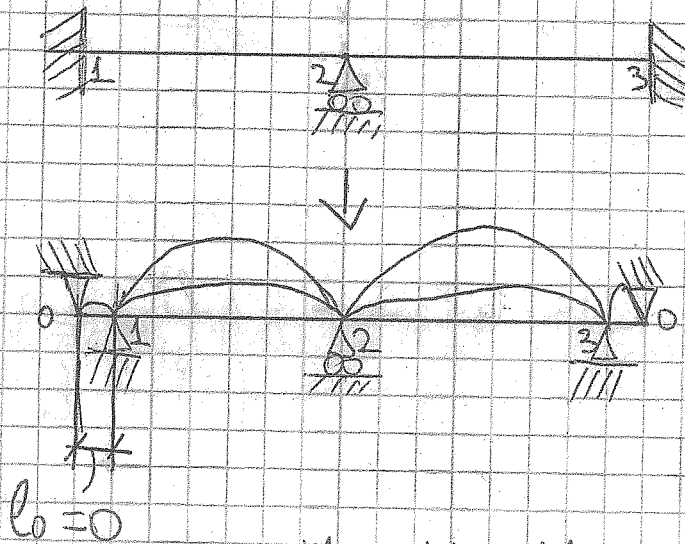
$$\begin{cases} 2M_2 \cdot 9 + M_3 \cdot 5 = -34,25 & \begin{cases} 2M_2 \cdot 9 + M_3 \cdot 5 = -47,25 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 \cdot 5 + 2M_3 \cdot 11 = -34,25 - 54 & \begin{cases} M_2 \cdot 5 + 2M_3 \cdot 11 = -85,25 \end{cases} \end{cases}$$

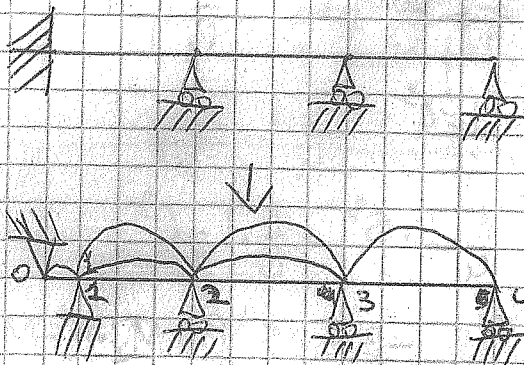
$$\begin{cases} M_3 = \frac{-47,25 - 2M_2 \cdot 9}{5} & \begin{cases} M_3 = \frac{-85,25 - 2M_2 \cdot 9}{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 \cdot 5 + 2M_3 \left( \frac{-47,25 - 2M_2 \cdot 9}{5} \right) = -85,25 & \begin{cases} M_2 \cdot 5 - \frac{94,5 - 4M_2 \cdot 9}{5} = -85,25 \end{cases} \end{cases}$$

20/10/2014



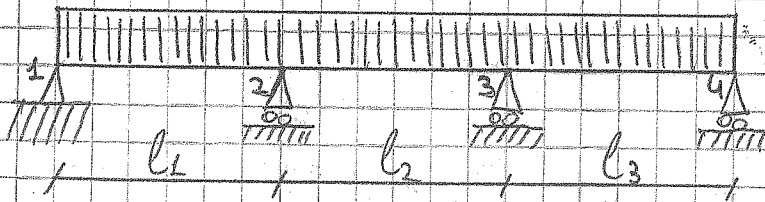
$$\left. \begin{array}{l} M_0 - M_1 - M_2 \\ M_1 - M_2 - M_3 \\ M_2 - M_3 - M_0 \end{array} \right\} \text{Tre equazioni} \\ \text{dei momenti}$$



$$\left. \begin{array}{l} M_0 - M_1 - M_2 \\ M_1 - M_2 - M_3 \\ M_2 - M_3 - M_4 \end{array} \right\} \text{Tre equazioni} \\ \text{dei momenti}$$



29/10/2014



$$l_1 = l_2 = l_3$$

$$M_1 = 0 \quad M_3 = ?$$

$$M_2 = ? \quad M_4 = ?$$

$$1) M_1 \cdot l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -6(B^* + A^*)$$

$$0 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{4}q \cdot l_1^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_2^3$$

$$2) M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + M_4 \cdot l_3 = -6(B^* + A^*)$$

$$M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + 0 = -\frac{1}{4}q \cdot l^3 - \frac{1}{4}q \cdot l^3$$

$$\begin{cases} 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{4}q \cdot l_1^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_2^3 \\ M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) = -\frac{1}{4}q \cdot l_2^3 - \frac{1}{4}q \cdot l_3^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{2}q \cdot l^3 \\ M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) = -\frac{1}{2}q \cdot l^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{2}q \cdot l^3 \\ M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) = -\frac{1}{2}q \cdot l^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -\frac{1}{2}q \cdot l^3 \\ M_2 \cdot l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) = -\frac{1}{2}q \cdot l^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = \frac{-M_3 \cdot l_2 - \frac{1}{2}q \cdot l^3}{2(l_1 + l_2)} \\ M_3 = \frac{-M_2 \cdot l_2 - \frac{1}{2}q \cdot l^3}{2(l_2 + l_3)} \end{cases}$$

$$M_2 = -\frac{1}{10}q \cdot l^2 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = -\frac{1}{10}q \cdot l^2 \text{ KN} \cdot \text{m}$$