**Problema n.158 pag.533**

**Dopo aver scritto l’equazione della parabola con asse parallelo all’asse y passante per A=(2,2) ed avente vertice V=(-1,1), scrivi l’equazione della retta ad essa tangente in A.**

**1° quesito)**

L’equazione generica di una parabola con l’asse parallelo all’asse y è: **y=ax2 + bx + c =0**; se una parabola passa per il punto A allora le coordinate di tale punto soddisferanno l’equazione della parabola, ossia:

$$2=2^{2}a+2b+c\rightarrow 4a+2b+c=2$$

D’altro canto, conoscendo le coordinate del vertice V, risulterà:

$$-\frac{b}{2a}=-1\rightarrow -b=-2a\rightarrow b=2a$$

$-\frac{∆}{4a}=1\rightarrow ∆=-4a\rightarrow b^{2}-4ac=-4a$**.**

Ponendo a sistema le tre equazioni in grassetto:

$$\left\{\begin{array}{c}b=2a\\4a+2∙\left(2a\right)+c=2\rightarrow \\\left(2a\right)^{2}-4ac=-4a\end{array} \right.\left\{\begin{array}{c}b=2a\\4a+4a+c=2\\4a^{2}-4ac=-4a \end{array}\rightarrow \left\{\begin{array}{c}b=2a\\8a+c=2\\\*a-c=-1\end{array}\right.\right.$$

**\*La terza equazione è stata ottenuta dividendo tutto per 4a (a≠0).**

$$\left\{\begin{array}{c}b=2a\\8a+c=2\\\*a-c=-1\end{array}\rightarrow \right.\left\{\begin{array}{c}b=2a\\9a=1\\a-c=-1\end{array}\rightarrow \left\{\begin{array}{c}a=\frac{1}{9}\\b=2∙\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}-c=-1\end{array}\rightarrow \left\{\begin{array}{c}a=\frac{1}{9}\\b=\frac{2}{9}\\-c=-\frac{1}{9}-1=-\frac{10}{9}\end{array}\right.\right.\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}a=\frac{1}{9}\\b=\frac{2}{9}\\c=\frac{10}{9}\end{array}\right.\rightarrow la parabola cercata:y=\frac{1}{9}x^{2}+\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}$$

**2° quesito)**

La retta tangente alla parabola nel punto A appartiene al fascio di rette di centro A, pertanto:

$$y-2=m\left(x-2\right)\rightarrow y=mx-2m+2;$$

Per risolvere il quesito pongo a sistema l’equazione della parabola con l’equazione del fascio di rette di centro A e impongo al Δ dell’equazione di secondo grado parametrica così ottenuta di essere uguale a zero (condizione di tangenza retta-parabola).

$$\left\{\begin{array}{c}y=\frac{1}{9}x^{2}+\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}\\y=mx-2m+2\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\mx-2m+2=\frac{1}{9}x^{2}+\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}\end{array}\right.$$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\\frac{1}{9}x^{2}+\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}-mx+2m-2=0\end{array}\right.$ moltiplico per 9

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\x^{2}+2x+10-9mx+18m-18=0\end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\x^{2}+\left(2-9m\right)x+18m-8=0\end{array}\right.$$

I coefficienti dell’equazione di secondo grado parametrica sono: a=1 b=2-9m c=18m-8.

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\∆=\left(2-9m\right)^{2}-4∙1∙\left(18m-8\right)=0\end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\∆=4+81m^{2}-36m-72m+32=0\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\81m^{2}-108m+36=0\end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\9m^{2}-12m+4=0\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}y=mx-2m+2\\∆=144-144=0\rightarrow m=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c}m=\frac{2}{3}\\y=\frac{2}{3}∙x-2∙\frac{2}{3}+2\end{array}\rightarrow \left\{\begin{array}{c}m=\frac{2}{3}\\y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+2\end{array}\rightarrow \left\{\begin{array}{c}m=\frac{2}{3}\\y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\end{array}\right.\right.\right.$$

La retta cercata, quindi, ha equazione: $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

