**La Geometria**

La Geometria è la scienza che studia la forma, l’estensione dei corpi e le trasformazioni che questi possono subire.

Gli oggetti fondamentali della geometria sono il **punto**, la **retta** e il **piano.**

Essi sono detti **enti** **primitivi** perché di essi non si dà alcuna definizione.

In geometria, le regole fondamentali o regole di partenza non dimostrabili ma da accettare come “vere”, si dicono **assiomi**; le affermazioni che, partendo dagli assiomi, si può dimostrare attraverso un ragionamento logico prendono il nome di **teoremi**. Analizziamo alcuni assiomi basilari della geometria euclidea:

**Assiomi di appartenenza**

*A1. Ogni coppia di punti distinti dello spazio appartiene ad una e una retta sola.*

*A2. Tre punti non allineati definiscono uno e un solo piano.*

*A3. Se due punti di una retta giacciono su un piano, tutta la retta appartiene al piano.*

*A4. Ogni piano contiene infiniti punti e infinite rette.*

*A5*. Lo spazio contiene infiniti punti, infinite rette ed infiniti piani.

Attraverso questi primi assiomi, possiamo già dare la definizione di **figura geometrica** come un qualunque insieme di punti dello spazio.

Due rette si dicono **complanari** se appartengono alla stesso piano.

Dure rette complanari si dicono **incidenti** se si intersecano in un punto altrimenti si dicono **parallele**.

**Assiomi di ordinamento**

A6. Tracciata una retta r e presi due punti distinti A e B su di essa tali che nel verso stabilito A precede B, allora accade che:

* esiste almeno un punto che segue A e precede B;
* esiste almeno un punto che precede A;
* esiste almeno un punto che segue B

A7. Data una retta r in un piano, si dice **semipiano** ciascuna delle regioni in cui il piano resta diviso dalla retta stessa che si chiama retta **origine o frontiera** del semipiano.

Grazie a questo assioma, siamo in grado di affermare che la retta è formata da infiniti punti o che è **illimitata**.

Verifica di comprensione:

1. Per tre punti sempre una retta. V F
2. Tre punti individuano sempre rette distinte. V F
3. per un punto passano sempre infinite rette. V F
4. per: passano infinite linee ma una retta sola V F

Esiste sempre un solo piano che passa per:

1. Tre punti allineati. V F
2. Una retta è un punto che non le appartiene. V F
3. Tre punti non allineati. V F
4. Una retta e due punti che non le appartengono. V F
5. Due punti. V F

**SEMIRETTE, SEGMENTI E ANGOLI**

**La semiretta**

Sopra una retta *a* disegniamo un punto O

Il punto O divide la retta in due parti ciascuna delle quali è chiamata **semiretta di origine O**

.

*a* **O**

**Il segmento**

Sopra una retta disegniamo due punti A e B.

I punti che si trovanotra **A** e **B** formano il **segmento** AB

.

.

Anche i punti A e B fanno parte del segmento e si chiamano **estremi** del segmento

A B

**Definizione**

.

Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno un estremo in comune

 A

.

 B C

**Definizione**

Due segmenti si dicono **adiacenti** se hanno un estremo in comune e se appartengono alla stessa retta

.

.

.

A B C

**L’angolo**

Consideriamo due semirette *a* e *b* che hanno la stessa origine.

Esse dividono il piano in due parti: ognuna di queste due parti si dice **angolo**.

Le due semirette si chiamano **lati** dell’angolo.

L’origine comune alle due semirette si dice **vertice** di ciascun angolo.

.

*lato*

*angolo*

*vertice*

*angolo*

*lato*

Come distinguere i due angoli?

L’angolo **convesso** è quello che **non** **contiene** i prolungamenti dei suoi lati

L’angolo **concavo** è quello che **contiene** i prolungamenti dei suoi lati.

*b*

*a*

*angolo concavo*

*angolo convesso*

**Definizione**

Due angoli si dicono **opposti al vertice** se i lati dell’uno sono i prolungamenti dei lati dell’altro

 *a*

α

 β

 *b*

**Definizione**

*a*

Un angolo può essere piatto, retto o giro

Quando i lati di un angolo appartengono alla stessa retta si formano due angoli uguali: ognuno si chiama **angolo piatto**.

 .

*a*

*angolo piatto*

*b*

**O**

*angolo piatto*

L’angolo si chiama **retto** se la sua ampiezza è la metà dell’angolo piatto.

.

*angolo retto* *angolo retto*

 **O**

*b*

Quando i lati di un angolo sono sovrapposti si formano:

L’angolo **giro** che coincide con tutto il piano

L’angolo **nullo** che è formato dai punti delle due semirette

*angolo giro*

**O** *angolo nullo*

 *a = b*

**Definizioni**

Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è un angolo retto

Due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto

Due angoli si dicono **esplementari** se la loro somma è un angolo giro

**I poligoni**

*D*

*spezzata aperta*

Un insieme di segmenti consecutivi si chiama **spezzata**.

La spezzata può essere:

*A*

1. **aperta** se il primo e l’ultimo segmento non sono consecutivi

*C*

1. **chiusa** se il primo e l’ultimo segmento sono consecutivi.

*D*

*A*

*spezzata chiusa*

*B*

*B*

*C*

Si chiama **poligono** la spezzata chiusa e la parte finita di piano da essa delimitata.

I segmenti che formano la spezzata si chiamano **lati** del poligono e i loro estremi si chiamano **vertici** del poligono.

Il segmento che unisce due vertici non consecutivi si chiama **diagonale**.

Un poligono si dice convesso quando, comunque presi due interni, il segmento che ricongiunge è sempre interno al poligono stesso. Un poligono si dice concavo se esistono almeno due punti il cui segmento congiungente non appartiene interamente al poligono.

In un poligono convesso si distinguono:

angolo interno, ossia quell'angolo che ha il vertice in uno dei vertici del poligono e come lati le due semirette uscenti da quel vertice.

Angolo esterno, ogni angolo adiacente all'angolo interno; ogni angolo interno a due angoli esterni adiacenti.

Corda, si definisce tale ogni segmento che unisce due punti qualsiasi appartenenti al contorno del poligono ma che non appartengono allo stesso lato.

Diagonale, ogni corda che unisce due vertici del poligono non consecutivi.

D'ora in avanti quando parleremo di angolo ci riferiremo ad un angolo interno.

La misura delle lunghezze di tutti i lati del poligono si chiama **perimetro**.

**I triangoli**

Un **triangolo** è un poligono che ha tre lati.

Classificazione dei triangoli in base ai lati:

* triangolo **scaleno** se ha tutti i lati disuguali
* triangolo **isoscele** se ha due lati uguali (i due lati uguali sono detti **lati** **obliqui**, mentre il terzo lato è detto **base**)
* triangolo **equilatero** se ha tutti i lati uguali

Classificazione dei triangoli in base agli angoli:

* triangolo **acutangolo** se ha tutti gli angoli acuti
* triangolo **rettangolo** se ha un angolo retto (il lato opposto all’angolo retto si chiama **ipotenusa**, gli altri due lati **cateti**)
* triangolo **ottusangolo** se ha un angolo ottuso

**Altezze, mediane e bisettrici di un triangolo**

L’**altezza** relativa ad un lato è il segmento che parte dal vertice opposto al lato ed è perpendicolare al lato stesso.

Il punto di incontro delle tre altezze si chiama **ortocentro**.

La **mediana** è il segmento che unisce un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

Il punto di incontro delle tre mediane si chiama **baricentro**.

La **bisettrice** relativa ad un angolo è il segmento che divide l’angolo in due parti uguali.

Il punto di incontro delle tre bisettrici si chiama **incentro**.

L’**asse** di un lato di un triangolo è il segmento perpendicolare al punto medio del lato; il punto di incontro dei tre assi si chiama **circocentro.**

**Criteri di congruenza dei triangoli**

**Primo criterio**

Due triangoli sono congruenti quando hanno ordinatamente congruenti due lati e l’angolo fra di essi compreso.

**Secondo criterio**

Due triangoli sono congruenti quando hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

**Terzo criterio**

Due triangoli sono congruenti quando hanno ordinatamente congruenti i tre lati.

**Quarto criterio**

Due triangoli sono congruenti quando hanno due angoli e un lato opposto ad uno di essi ordinatamente congruenti.

**Le proprietà del triangolo isoscele**

**Teorema**

A

In un triangolo isoscele gli angoli adiacenti alla base sono congruenti.

Ipotesi

AB  AC

Tesi



B

M

C

Dimostrazione

Tracciamo la mediana relativa alla base BC e indichiamo con M la sua intersezione con la base.

Consideriamo adesso i triangoli AMC e AMB.

Essi hanno:

1. AB  AC per ipotesi
2. AM in comune
3. MCMB perché AM è la mediana.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

Essi avranno quindi 

**Teorema**

In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è sia altezza relativa alla base sia bisettrice dell’angolo al vertice.

A

Ipotesi

AB  AC

CM  BM

Tesi

 (cioè AM è altezza)

 (cioè AM è bisettrice dell’angolo al vertice A)

B

M

C

Dimostrazione

Procedendo come sopra si arriva ad affermare che i triangoli AMC e AMB sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

Essi avranno quindi:

 e poiché questi due angoli sono supplementari allora sono entrambi retti; di conseguenza la mediana AM è anche altezza relativa alla base BC.

 e quindi la mediana AM è anche bisettrice dell’angolo al vertice A.

Un triangolo non può avere più di un angolo retto o di un angolo ottuso.

Un triangolo si dice acutangolo si a tutti gli angoli acuti.

Un triangolo si dice ottusangolo se ha un angolo ottuso.

Un triangolo si dice rettangolo se ha un angolo retto.

Nel caso del triangolo rettangolo di lati che formano l'angolo retto si chiamano cateti mentre il lato opposto all'angolo di 90° si chiama ipotenusa.

**Relazioni fra angoli e lati di un triangolo**

1. In ogni triangolo, se due lati sono disuguali, il lato più grande è sempre opposto all’angolo più grande e viceversa.
2. In ogni triangolo ciascun lato è più piccolo della somma degli altri due.
3. **Teorema**

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti:

i due cateti, oppure

un cateto e un angolo acuto, oppure

l'ipotenusa e un angolo acuto, oppure

l'ipotenusa e un cateto.

**Congruenza di poligoni**

1. Due poligoni convessi con lo stesso numero di lati sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti tutti gli angoli e tutti i lati, fatta eccezione al massimo di:
2. un lato e i due angoli ad esso adiacenti, o
3. due lati consecutivi e l’angolo compreso tra questi, oppure
4. tre angoli con i vertici consecutivi.
5. La somma degli angoli interni di un poligono convesso di N lati è congruente a N -2 angoli piatti.
6. La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è sempre congruente a due angoli piatti.

Approfondimento: somma e differenza di angoli a pagina 61.

Verifica di comprensione a pagina 63.



**Trasformazioni geometriche**

Si definisce trasformazione geometrica l'insieme delle regole attraverso le quali ad ogni punto A del piano viene associato un solo punto A’ dello stesso piano e viceversa. Il punto A’ si dice trasformato del punto A, mentre A e il trasformato di A’.

ES.) disegnare una retta r e tante rette perpendicolari ad essa; trovare il trasformato di vari punti tale che quest'ultimo sia ad una distanza doppia da r rispetto al punto di partenza.





Si dice invariante di una trasformazione geometrica qualunque caratteristica che si conserva dopo la trasformazione. Si dicono, infine, elementi uniti di una trasformazione geometrica gli elementi del piano che hanno per trasformati se stessi.

**LE ISOMETRIE**

Si definisce isometria quella trasformazione geometrica che ad ogni coppia di punti A e B di un piano fa corrispondere i punti A’ e B’ dello stesso piano tale che il segmento AB sia congruente al segmento A’B’. Due figure che si corrispondono in una isometria si dicono isometriche.

**Teorema)** In ogni isometria, a rette incidenti corrispondono rette incidenti e a rette parallele corrispondono rette parallele.

**Teorema)** Ogni isometria trasforma un triangolo in un triangolo ad esso congruente.

**Teorema)** Ogni isometria trasforma un angolo in un angolo ad esso congruente.

**LE ISOMETRIE FONDAMENTALI**

**La simmetria assiale – simmetria centrale – traslazione – rotazione.**

Si definisce simmetrico di un punto P rispetto ad una retta r, il punto P’ opposto rispetto alla retta, tale che la distanza di P dalla retta sia uguale alla distanza del punto P’ dalla stessa retta.

Si definisce, allora, simmetria assiale la trasformazione che, assegnata una retta r, associa ad ogni punto del piano il suo simmetrico rispetto alla retta.



Tra le figure geometriche analizzate, alcune possiedono un asse di simmetria:

* Un segmento possiede un asse di simmetria rappresentato proprio dal suo asse;
* un angolo ha come asse di simmetria la sua bisettrice;
* un triangolo isoscele ha come asse di simmetria la bisettrice dell’angolo al vertice.



**simmetria centrale**

Si definisce simmetria centrale di centro O, la trasformazione geometrica che associa ad ogni punto del piano il suo simmetrico. Il punto O si chiama “centro di simmetria”; due figure che si corrispondono in una simmetria centrale si dicono simmetriche rispetto ad O. La simmetria centrale è una isometria.



**la traslazione**

Preso un segmento AB orientato, cioè sul quale sia stato definito un verso, esso si definisce vettore; un vettore è univocamente individuato nel piano attraverso tre grandezze: la *direzione*, il *verso* e *l’intensità* o *modulo*.

Due vettori si diranno equipollenti se avranno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo.

Si dice traslazione di vettore v la trasformazione geometrica che associa ad ogni punto P del piano il punto P’ traslato secondo il vettore v.



La traslazione è una isometria.

**la rotazione**

Si dice rotazione di centro O e ampiezza alfa la trasformazione che associa ad ogni punto P del piano il punto P’ ruotato di un angolo orientato alfa rispetto al centro O.



La rotazione è una isometria.

**Prodotto di trasformazioni**

Si definisce prodotto di trasformazioni l’applicazione di una serie di trasformazioni geometriche. In particolare, il prodotto di due o più isometrie è ancora un’isometria.

**Teorema)** Il prodotto di due simmetrie assiali rispetto ad assi tra loro perpendicolari equivale ad una simmetria centrale avente il centro nel punto di intersezione degli assi.

**Teorema)** Il prodotto di due simmetrie assiali rispetto ad assi tra loro paralleli equivale ad una traslazione secondo un vettore perpendicolare agli assi e di modulo pari al doppio della loro distanza.

**Teorema)** Il prodotto di due simmetrie assiali rispetto ad assi tra loro incidenti in modo generico equivale ad una rotazione intorno al punto di intersezione di ampiezza doppia rispetto all’angolo formato dagli assi, orientato dal primo al secondo asse.

**Teorema)** Il prodotto di due simmetrie centrali equivale ad una traslazione secondo un vettore di modulo doppio rispetto alla distanza tra i due centri di simmetria e parallelo ad essa.

**Teorema)** Il prodotto di due traslazioni equivale ad una traslazione secondo un vettore somma di quelli assegnati.

**Teorema)** Il prodotto di due rotazioni con lo stesso centro equivale ad una rotazione intorno allo stesso centro ma di ampiezza pari alla somma delle singole ampiezze.

**Teorema)** Ogni isometria è ottenibile attraverso il prodotto di al massimo tre simmetrie assiali.

**Parallelogrammi**

Un parallelogramma è un quadrilatero convesso con le seguenti caratteristiche.

1. ha un centro di simmetria;
2. ha i lati opposti paralleli;
3. ha gli angoli adiacenti supplementari;
4. ha gli angoli opposti congruenti;
5. ha le diagonali che si incrociano nel punto medio che è il centro O di simmetria.

**Parallelogrammi particolari**

Si chiama **rettangolo** un parallelogramma avente tutti gli angoli e le diagonali congruenti; possiede, inoltre, due assi di simmetria passanti per i punti medi dei lati opposti.

Si chiama **rombo** un parallelogramma che ha tutti i lati congruenti e le diagonali perpendicolari e bisettrici degli angoli opposti; possiede, inoltre, due assi di simmetria rappresentate dalle rette passanti per le diagonali.

Si definisce **quadrato** un parallelogramma con tutti i lati e tutti gli angoli congruenti; essendo esso stesso un rettangolo ed un rombo, possiede quattro assi di simmetria ovvero le rette passanti per i punti medi e le rette passanti per le diagonali.

Si definisce **trapezio** un quadrilatero avente due lati paralleli che si dicono **basi**, mentre gli altri due lati si dicono **obliqui**; la distanza tra le basi si dice altezza. In particolare: se i lati obliqui sono disuguali esso si dice **scaleno**; se sono congruenti si dice **isoscele** mentre se uno dei lati obliqui è perpendicolare alle basi si dice **rettangolo**. Il trapezio non ha particolari proprietà, fatta eccezione per quella secondo gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari.

Se, invece, il trapezio è isoscele, allora, si evidenziano le seguenti proprietà:

1. gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti;
2. le diagonali sono congruenti;
3. la retta passante per i punti medi delle basi è asse di simmetria.

**Corrispondenza di Talete**

Tracciata una serie di rette parallele intersecate da due rette trasversali, allora se sulla prima retta trasversale si determinano due segmenti congruenti, lo saranno anche i segmenti corrispondenti sull’altra trasversale.

La corrispondenza di Talete presenta un’applicazione importante se applicata ai triangoli; infatti, se si traccia per il punto medio di un lato la retta parallela ad un altro lato, questa taglia il terzo lato nel suo punto medio; non solo, il segmento che unisce tali punti medi di due lati è la metà dell’altro lato.

**La circonferenza**

Si definisce **circonferenza** il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso assegnato denominato centro.

Si definisce **cerchio** l'insieme dei punti della circonferenza e dei suoi punti interni.

Ogni segmento che unisce due punti della circonferenza passando per il centro si chiama **diametro**.

Le caratteristiche geometriche della circonferenza sono le seguenti:

1. Ha **un** **centro di simmetria** che coincide con il centro della circonferenza stessa.
2. Ha **infiniti assi di simmetria** identificati dalle rette che passano per il centro.
3. Ogni **rotazione di centro O** trasforma un punto della circonferenza o un punto del cerchio in un altro punto che appartiene ancora alla circonferenza o al cerchio.

Per tracciare una circonferenza bastano tre punti non allineati; il centro, allora, sarà il **circocentro** ossia il punto di intersezione degli assi relativi ai segmenti che uniscono i tre punti assegnati.

**Elementi individuabili in una circonferenza**

Prendendo due punti A e B su una circonferenza, chiamiamo:

1. **arco** ognuna delle due parti in cui A e B divide la circonferenza;
2. **corda** il segmento che unisce i due punti A e B; si dice che la corda AB sottende l'arco AB. quindi, ad ogni arco corrisponde una sola corda mentre ad ogni corda corrispondono due archi.
3. La porzione di cerchio delimitata da una corda AB e da uno dei due archi che la sottendono si definisce **segmento circolare** di base AB; la parte di cerchio delimitata da due corde parallele AB e CD si definisce **segmento circolare a due basi**. Se i punti A e B sono gli estremi di un diametro, i due archi sono congruenti e ciascuno di essi prende il nome di **semi circonferenza**; ovviamente, la parte di cerchio delimitata da un diametro e da una semi circonferenza si definisce **semicerchio**.
4. Un angolo che ha il vertice nel centro di una circonferenza si definisce **angolo al centro;** i lati dell’angolo, intersecando la circonferenza nei punti A e B, delimitano un arco AB interno all'angolo; si dice che l'angolo al centro insiste su quell'arco; l'angolo al centro può essere convesso o concavo.
5. La parte di piano delimitata da un angolo al centro si chiama **settore circolare**.