L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

La circonferenza è *il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.*
Grazie a tale definizione la sua equazione si può scrivere come

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad (*)$$

dove r è il raggio e $C(\alpha,\beta)$ è il centro della circonferenza.
Quindi, noti centro e raggio e terminato di svolgere i calcoli, è immediato trovare l'equazione della circonferenza cercata.

Vediamo alcuni casi tipici.

1. Trovare l'equazione della circonferenza noti centro e raggio.

   In questo caso basta sostituire le coordinate del centro ed il valore del raggio nell'equazione (*) e svolgere i calcoli.

   Esempio

   Trovare l'equazione della circonferenza di centro $C(1,2)$ *e raggio* $r=3$.

   Sostituendo i dati nell'equazione (*) si ottiene:
   $$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$$
   $$x^2-2x+1+y^2-4y+4=9$$
   L'equazione cercata è allora: $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

2. Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB noti gli estremi del diametro.

   Per prima cosa bisogna ricavare la misura del diametro, come distanza tra i due estremi del diametro, quindi dividere tale valore per due ottenendo così il raggio.
   Si individua quindi il centro della circonferenza come punto medio del segmento AB.
   È quindi possibile sostituire tali valori nella formula (*) e svolgere i calcoli.

   Esempio

   Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB di estremi $A(-2,-3)$ *e* $B(6,5)$.

   Il diametro ha misura: $AB=\sqrt{(-2-6)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$ e quindi $r=4\sqrt{2}$.
   Il centro avrà coordinate: $C\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-3+5}{2}\right)\rightarrow C(2,1)$
   Sostituendo i dati nell'equazione (*) si ottiene:
   $$(x-2)^2+(y-1)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$$
   $$x^2-4x+4+y^2-2y+1=32$$
   L'equazione cercata è allora: $x^2+y^2-4x-2y-27=0$.

3. Trovare l'equazione della circonferenza di centro dato e passante per un punto dato.

In questo caso si deve determinare il raggio come distanza tra il centro ed il punto dato. Utilizzando poi l'equazione (*) si trova la circonferenza cercata.

<u>Esempio</u>

Trovare l'equazione della circonferenza di centro $C(1,-2)$ *e passante per* $A(2,3)$.

Il raggio ha misura: $r=\sqrt{(2-1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{26}$

Sostituendo i dati nell'equazione (*) si ottiene: $(x-1)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=26$$

L'equazione cercata è allora: $x^2+y^2-2x+4y-21=0$.

Esercizi

Trovare l'equazione della circonferenza noti:

1) Centro $C\ 0,1$ e raggio
2) Centro $C\ \sqrt{2},\sqrt{3}$ e raggio $r=\sqrt{5}$
3) Centro $C\ -1,2$ e passante per $A\ 3,-4$
4) Diametro AB con $A\ -1,2$ e $B\ 3,8$

È possibile anche trovare l'equazione di una circonferenza in forma canonica $x^2+y^2+ax+by+c=0$ se sono note 3 condizioni, così da determinare i coefficienti a, b e c che compaiono nella sua equazione generale, risolvendo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite.

Il caso tipico è il seguente:

Trovare l'equazione della circonferenza passante per tre punti dati.

In questo caso basta risolvere il sistema costituito dall'equazione della circonferenza in cui si sostituiscono, una alla volta, le coordinate dei tre punti.

Esempio

Trovare l'equazione della circonferenza passante per $A(2,0), B(3,1), C(-1,1)$

Il sistema risolutivo risulta essere: $\begin{cases} 4+2a+c=0 \\ 9+1+3a+b+c=0 \\ 1+1-a+b+c=0 \end{cases}$ che risolto diventa:

$$\begin{cases} c=-2a-4 \\ 10+3a+b-2a-4=0 \\ 2-a+b-2a-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-2a-4 \\ a+b+6=0 \\ -3a+b-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-2a-4 \\ b=-a-6 \\ -3a-a-6-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \\ c=0 \end{cases}$$

L'equazione cercata risulta allora essere: $x^2+y^2-2x-4y=0$.

Esercizi

Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti:
1) $A(-1,2), B(0,3), C(-4,3)$
2) $A(2,-3), B(4,-1), C(0,1)$

3.6 Casi Particolari della Circonferenza

$c = 0$ Essendo il termine noto eguale a 0, come tutte le coniche, la circonferenza passa per l'origine.

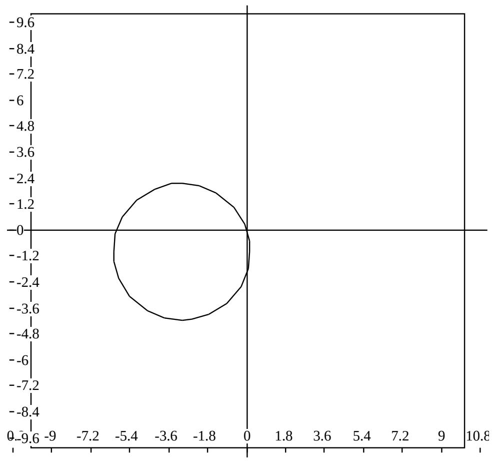

Figura 3.2: Circonferenza passante per l'origine degli assi

$a = 0$ Essendo il coefficiente della x eguale a 0, la circonferenza ha centro sull'asse delle y.

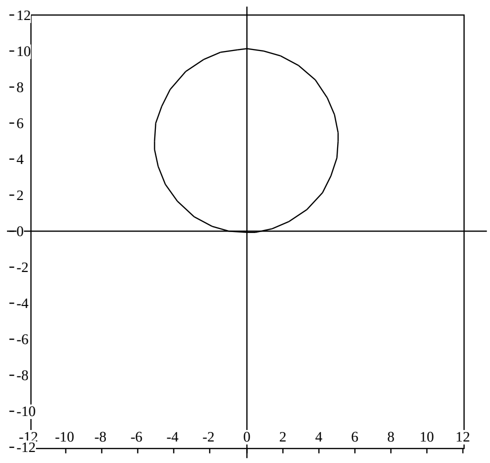

Figura 3.3: Circonferenza con centro sull'asse y

$b = 0$ Essendo il coefficiente della y eguale a 0, la circonferenza ha centro sull'asse delle x.

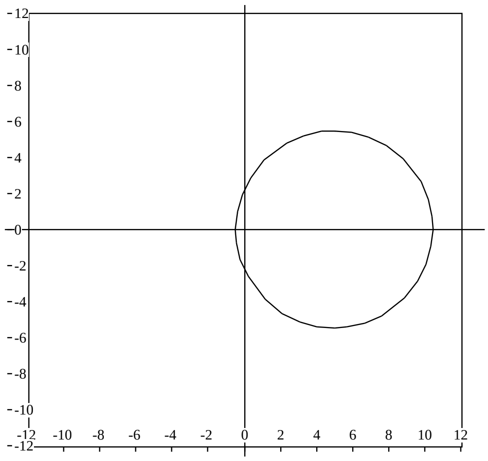

Figura 3.4: Circonferenza con centro sull'asse x

$a = b = 0$ Essendo i coefficienti di x e y eguali a 0, il centro della circonferenza si trova nell'origine degli assi.

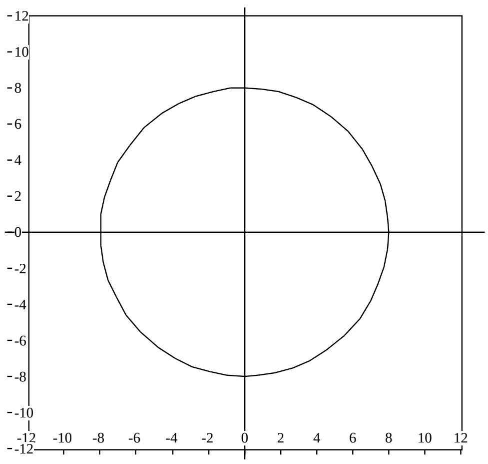

Figura 3.5: Circonferenza con centro nell'origine degli assi

$a = c = 0$ Essendo il coefficiente della x e il termine noto eguali a 0, la circonferenza ha centro sull'asse delle y e tange l'asse delle x.

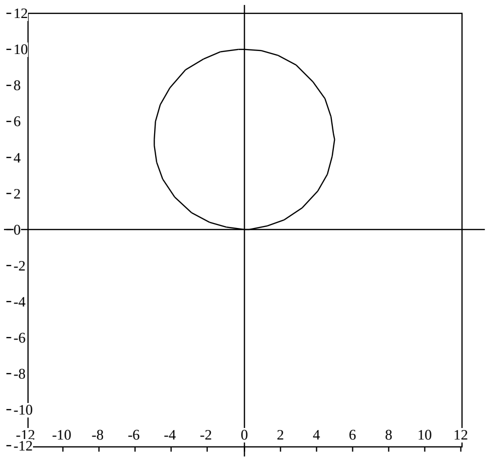

Figura 3.6: Circonferenza con centro in y e con x come tangente

$b = c = 0$ Essendo il coefficiente della y e il termine noto eguali a 0, la circonferenza ha centro sull'asse delle x e tange l'asse delle y.

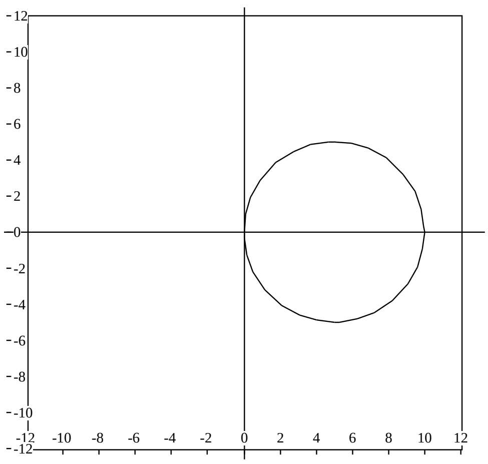

Figura 3.7: Circonferenza con centro in x e con y come tangente