**Problema n.218 pag.471**

Dati i punti A=(1;3) B=(5;1), determina le coordinate di un punto P sulla retta r di equazione y = -3x – 1 che sia equidistante da A e da B. Trova poi le coordinate del punto Q che forma con i precedenti il quadrilatero convesso PABQ con i lati AB e PQ paralleli e avente area pari a 25.

**Soluzione 1° quesito)**

Il punto P giace sulla retta **r**, pertanto, le sue coordinate, dovendone soddisfare l’equazione, saranno **(x; -3x+1)**; l’equidistanza dal punto A e dal punto B porta a scrivere: PA = PB, cioè:

$\sqrt{\left(x-1\right)^{2}+\left(-3x+1-3\right)^{2}}=\sqrt{\left(x-5\right)^{2}+\left(-3x+1-1\right)^{2}}\rightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^{2}+\left(-3x-2\right)^{2}}=\sqrt{\left(x-5\right)^{2}+\left(-3x\right)^{2}}\rightarrow \sqrt{x^{2}+1-2x+9x^{2}+4+12x}=\sqrt{x^{2}+25-10x+9x^{2}}\rightarrow \sqrt{10x^{2}+10x+5}=\sqrt{10x^{2}-10x+25}\rightarrow ^{2}10x^{2}+10x+5$=$10x^{2}-10x+25\rightarrow 10x+10x=-5+25\rightarrow 20x=20\rightarrow x=1 e y=-3∙1+1=-3+1=-2.$

Le coordinate di P che risolvono il quesito sono: **P=(1;-2)**

**Soluzione 2° quesito)**

Avendo il quadrilatero due lati paralleli (AB e PQ) sarà un parallelogramma la cui area si calcola *“moltiplicando la somma delle basi per l’altezza e dividendo il prodotto per due”*:$Area=\frac{\left(AB+PQ\right)∙BH}{2}:$

Il punto Q giace sulla retta passante per P e per Q che, dovendo essere parallela alla retta per A e per B, ne deve condividere lo stesso coefficiente angolare; troviamo il coefficiente angolare della retta passante per A e B: $m=\frac{y\_{B}-y\_{A}}{x\_{B}-x\_{A}}=\frac{1-3}{5-1}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$**.** Allora, l’equazione della retta passante per P e parallela a quella passante per A e B, sarà: $y-y\_{P}=m∙\left(x-x\_{P}\right)\rightarrow y+2=-\frac{1}{2}∙\left(x-1\right)\rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-2\rightarrow $

$retta s: y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} $(retta passante per P e parallela alla retta passante per A e B).

Ora sono in grado di determinare la misura dell’altezza BH come distanza di B dalla retta **s** che andrà espressa in forma implicita: $y+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0\rightarrow $2y+x+3=0$\rightarrow x+2y+3=0.$

$$BH=\frac{\left|ax\_{B}+by\_{B}+c\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\frac{\left|1∙5+2∙1+3\right|}{\sqrt{1^{2}+2^{2}}}=\frac{\left|5+2+3\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|10\right|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10∙\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5.}$$

Il punto **Q** giace sulla retta **s**, pertanto, le sue coordinate, dovendone soddisfare l’equazione ,saranno $\left(x;-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)$**.**

$PQ=$ $\sqrt{\left(x-1\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+2\right)^{2} }=\sqrt{x^{2}+1-2x+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^{2} }=\sqrt{x^{2}+1-2x+\frac{1}{4}x^{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x }$

 $\sqrt{\frac{5}{4}x^{2}-\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}}= \sqrt{\frac{5x^{2}-10x+5}{4}}= \frac{1}{2}\sqrt{5x^{2}-10x+5}$

$$AB=\sqrt{\left(5-1\right)^{2}+\left(1-3\right)^{2}}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Finalmente: $Area=\frac{\left(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5x^{2}-10x+5}\right)∙2\sqrt{5}}{2}=25\rightarrow \left(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5x^{2}-10x+5}\right)∙2\sqrt{5}=50\rightarrow $

$$2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5x^{2}-10x+5}=\frac{50}{2\sqrt{5}}\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5x^{2}-10x+5}=-2\sqrt{5}+\frac{25}{\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}+\frac{25∙\sqrt{5}}{\sqrt{5}∙\sqrt{5}}=$$

$$=-2\sqrt{5}+\frac{25∙\sqrt{5}}{5}=-2\sqrt{5}+5\sqrt{5}=3\sqrt{5}\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5x^{2}-10x+5}=3\sqrt{5}\rightarrow \sqrt{5x^{2}-10x+5}=6\sqrt{5}\rightarrow $$

$$\left(\sqrt{5x^{2}-10x+5}\right)^{2}=\left(6\sqrt{5}\right)^{2}\rightarrow 5x^{2}-10x+5=180\rightarrow 5x^{2}-10x-175=0;$$

Risolvendo l’equazione di secondo grado si ottengono due soluzioni: $x\_{1}=-5 e x\_{2}=7$; la soluzione -5 porta ad un valore $y\_{1}=-\frac{1}{2}∙\left(-5\right)-\frac{3}{2}=+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1\rightarrow Q\_{1}=\left(-5;1\right) $mentre la soluzione 7 porta ad un valore $y=-\frac{1}{2}∙7-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=-5\rightarrow Q=\left(7;-5\right).$

Il punto Q1 non può essere accettato poiché rende il quadrilatero concavo, quindi l’unico punto accettabile è **Q**.

**Sezione grafica relativa al problema**

