UNITÀ 2
LA RAPPRESENTAZIONE DI DATI E FENOMENI

2.1 Le rappresentazioni di un fenomeno

IDEA-CHIAVE Un fenomeno può essere rappresentato con una tabella, con un grafico o con una formula.

La rappresentazione mediante una tabella

Consideriamo un rubinetto dal quale può uscire un flusso di acqua costante nel tempo, per esempio 2 litri di acqua al minuto. Sotto il rubinetto è posto un recipiente inizialmente vuoto [→ figura 1*a*]. La quantità d'acqua che si raccoglie nel recipiente dipende dal tempo trascorso [→ figura 1*b*]. In questo caso diciamo che la quantità d'acqua è la *variabile dipendente* e il tempo trascorso è la *variabile indipendente*.

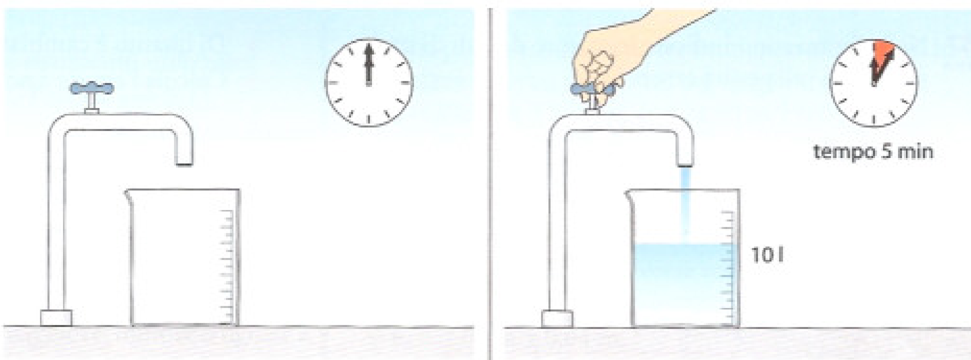


Figura 1
Quantità di acqua e tempo.

a Al tempo zero, il rubinetto è chiuso e il recipiente è vuoto.

b Quando il rubinetto è aperto, ogni minuto escono 2 litri di acqua.

Tabella 1

Tempo (min)	Quantità (litri)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
...	...

Rappresentiamo il fenomeno con la → tabella 1. Poiché il flusso dell'acqua non cambia, dopo 2 minuti nel recipiente ci sono 4 litri, dopo 3 minuti 6 litri e così via.

La rappresentazione mediante una formula

Nella → tabella 1 c'è una regolarità: ogni quantità di acqua si ottiene moltiplicando per 2 il tempo corrispondente. Se indichiamo con q la quantità di acqua che c'è nel recipiente al tempo generico t, possiamo descrivere il fenomeno con la formula:

$$q = 2 \cdot t$$

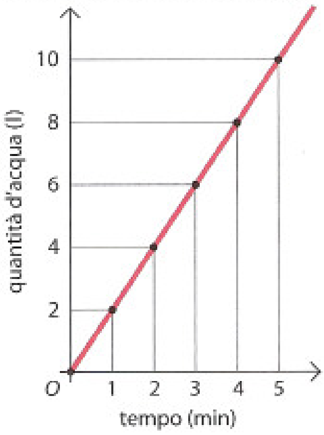
dove 2 indica la portata in litri al minuto.

Questa formula permette di calcolare la quantità d'acqua presente nel recipiente in un istante generico t e traduce nel linguaggio formale della matematica un fenomeno fisico che si svolge nel tempo, stabilendo un legame fra q misurato in litri e t misurato in minuti.

La rappresentazione mediante un grafico

Per rappresentare il fenomeno possiamo usare anche un grafico. Riportiamo sull'asse orizzontale il tempo (variabile indipendente) e su quello verticale la quantità di acqua (variabile dipendente). Per ogni coppia di elementi che si corrispondono nella → tabella 1 disegniamo un punto nel piano, come nella → figura 2. Poiché sappiamo che il flusso di acqua è costante, possiamo unire i punti con una linea continua.

Figura 2
Ogni punto della tabella rappresenta una coppia di valori.



Le tre rappresentazioni a confronto

Tabella, formula e grafico sono tre modi diversi di rappresentare uno stesso fenomeno. Forniscono le stesse informazioni? Per rispondere poniamoci questa domanda: quanta acqua c'è nel recipiente dopo 3,41 minuti?

Se guardiamo la → tabella 1, non riusciamo a dare una risposta; in essa vediamo solo le quantità di acqua relative a certi tempi ben definiti.

Se osserviamo la → figura 2, vediamo che la quantità di acqua aumenta al passare del tempo. Possiamo dare solo una valutazione approssimata della quantità di acqua dopo 3,41 minuti; essa è compresa fra 6 e 7 litri.

Solo la formula permette di rispondere con precisione alla domanda. Dopo 3,41 minuti la quantità di acqua che c'è nel recipiente è:

$$q = \left(\frac{2 \text{ litri}}{\text{min}}\right) \times (3{,}41 \text{ min}) = 6{,}82 \text{ litri}$$

- La tabella fornisce una conoscenza del fenomeno in alcuni intervalli di tempo;
- il grafico dà una visione sintetica e immediata del fenomeno: la quantità di acqua aumenta in modo regolare nel tempo;
- la formula è la rappresentazione più astratta, ma è anche quella che fornisce più informazioni: permette di conoscere la quantità di acqua che si raccoglie in un intervallo di tempo qualsiasi.

Analogie tra fenomeni diversi

Un ciclista percorre una strada pianeggiante alla velocità costante di 20 km/h. In 1 ora percorre 20 km, in 2 ore 40 km, in 3 ore 60 km.

Se indichiamo con s lo spazio percorso e con t il tempo impiegato a percorrerlo, la formula che descrive il fenomeno è:

$$s = 20 \cdot t$$

Dal punto di vista matematico questo fenomeno è analogo a quello del rubinetto, infatti la relazione che lega le due variabili è dello stesso tipo.

> In generale, fenomeni diversi possono essere studiati allo stesso modo, perché descrivibili con la stessa relazione:
>
> (variabile dipendente) = (costante) × (variabile indipendente)

Nel seguito descriveremo altri fenomeni che si comportano allo stesso modo.

2.3 Le grandezze direttamente proporzionali

IDEA-CHIAVE Il legame più semplice fra due grandezze variabili è quello di diretta proporzionalità.

Grandezze proporzionali nella vita quotidiana

Vogliamo comprare delle mele che costano 1,5 euro al kilogrammo. È chiaro che la spesa dipende dalla quantità di mele che compriamo. Perciò la quantità di mele è la variabile indipendente, la spesa totale è la variabile dipendente.
Possiamo riportare le due variabili come in → tabella 1.

Tabella 1

Quantità (kg)	0	1	2	3	4	...
Spesa (euro)	0	1,5	3,0	4,5	6,0	...

Se il numero dei kilogrammi raddoppia, anche la spesa raddoppia, se i kilogrammi triplicano anche la spesa triplica e così via.

Quando due grandezze si comportano in questo modo si dice che sono *direttamente proporzionali*. La quantità di mele acquistate e la spesa sostenuta sono direttamente proporzionali.

In generale, due grandezze x e y sono direttamente proporzionali se al raddoppiare di x anche y raddoppia, al triplicare di x anche y triplica e così via.

Due esempi di grandezze proporzionali

Vediamo un esempio tratto dalla geometria. Nella → figura 1 sono disegnati 3 quadrati di lato diverso. Il perimetro di ogni quadrato *dipende* dalla lunghezza del lato, possiamo considerare il perimetro come variabile dipendente, il lato come variabile indipendente. Costruiamo la → tabella 2 con lato e perimetro.

Tabella 2

Lato (cm)	0	10	20	30	...
Perimetro (cm)	0	40	80	120	...

Al raddoppiare del lato anche il perimetro diventa doppio, al triplicare del lato il perimetro diventa triplo e così via. Pertanto perimetro e lato di un quadrato sono direttamente proporzionali.

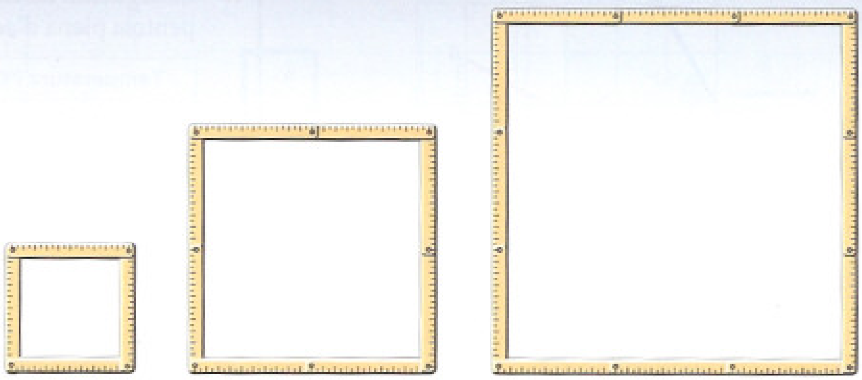


Figura 1
Perimetro e lato di un quadrato sono direttamente proporzionali.

Vediamo ora un altro esempio. Nella ➔ tabella 3 abbiamo riportato il volume e la massa di alcuni pezzetti di ferro. La densità del ferro è 7800 kg/m^3, che corrisponde a 7,8 g/cm^3. Perciò 1 cm^3 di ferro ha la massa di 7,8 g.

Tabella 3

Volume (cm^3)	0	1,0	2,0	3,0	4,0	...
Massa (g)	0	7,8	15,6	23,4	31,2	...

A volume doppio corrisponde massa doppia, a volume triplo corrisponde massa tripla e così via; la massa e il volume di una sostanza sono grandezze direttamente proporzionali.

La formula della diretta proporzionalità

Nel caso delle mele, il rapporto fra la spesa in euro e il numero dei kilogrammi acquistati è uguale a 1,5 euro/kg:

$$\frac{\text{spesa}}{\text{kilogrammi}} = 1{,}5 \text{ euro/kg}$$

Nel caso dei quadrati, il rapporto fra il perimetro e il lato che gli corrisponde è sempre uguale a 4:

$$\frac{\text{perimetro}}{\text{lato}} = 4$$

Infine, nel caso del ferro, il rapporto fra la massa e il volume corrispondente è sempre uguale a 7,8 g/cm^3:

$$\frac{\text{massa}}{\text{volume}} = 7{,}8 \text{ g/cm}^3$$

In tutti gli esempi, se si esclude la coppia di valori (0; 0) perché la divisione di un numero per zero non ha senso, il rapporto fra la variabile dipendente e quella indipendente assume un valore costante:

$$\frac{\text{variabile dipendente}}{\text{variabile indipendente}} = \text{costante}$$

In generale, se y e x sono due variabili direttamente proporzionali, il loro rapporto è costante:

$$\frac{y}{x} = k$$

k è la **costante di proporzionalità**.

La rappresentazione grafica

Nella ➔ figura 2 abbiamo rappresentato graficamente il volume e la massa del ferro:

scala orizzontale: 1 cm ⟶ 1 cm^3

scala verticale: 1 cm ⟶ 7,8 g

Ogni punto del grafico è individuato da una coppia di numeri, di cui il primo rappresenta il volume e il secondo la massa corrispondente. Il punto B rappresenta un pezzo di ferro che ha il volume di 2 cm^3 e la massa di 15,6 g.

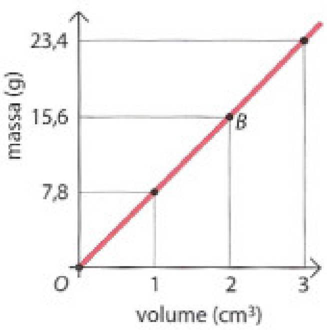
Tutti i punti sono allineati con l'origine delle coordinate. Questa è un'altra proprietà delle grandezze direttamente proporzionali.

Il grafico di due grandezze direttamente proporzionali è costituito da punti allineati con l'origine delle coordinate.

RICHIAMO
Per passare dai kg/m^3 ai g/cm^3 basta dividere per 1000.

MATEMATICA
Possiamo anche scrivere $y = k \cdot x$ e affermare che y è funzione di x.

Figura 2
Ogni punto del grafico rappresenta un pezzetto di ferro. Tutti i punti sono allineati con l'origine O (0; 0), perché massa e volume di una sostanza sono direttamente proporzionali.



2.4 Altre relazioni matematiche

IDEA-CHIAVE In molti fenomeni, le grandezze fisiche sono legate da relazioni che non sono di diretta proporzionalità.

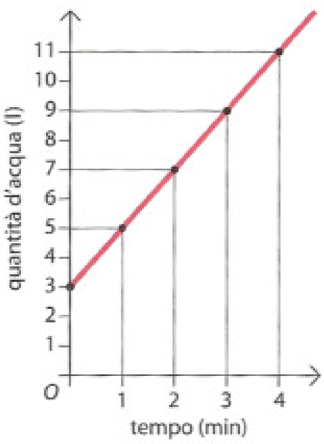
La correlazione lineare

Riprendiamo l'esempio del rubinetto riportato a pagina A 40. Sappiamo che dal rubinetto esce un flusso di acqua costante di 2 litri al minuto. Esaminiamo un caso diverso dal precedente, facendo la seguente ipotesi: quando apriamo il rubinetto il recipiente non è vuoto, ma contiene già 3 litri di acqua. Costruiamo la → tabella 1.

Tabella 1

Tempo (min)	0	1	2	3	4	...
Quantità di acqua (litri)	3	5	7	9	11	...

Figura 1
I punti sono allineati fra loro ma non con l'origine degli assi.



Il grafico relativo alla tabella è in → figura 1; i punti sono allineati fra loro ma non con l'origine degli assi cartesiani, perciò le due grandezze non sono direttamente proporzionali; in questo caso si dicono **correlate linearmente**.

Osserviamo che la formula $q = 2 \cdot t$ non è più valida per calcolare la quantità d'acqua che si trova nel contenitore al tempo t. A ogni quantità calcolata con quella formula bisogna aggiungere 3 litri.

Quindi la formula che descrive correttamente il fenomeno è:

$$q = 2 \cdot t + 3$$

In generale, se due grandezze y e x sono correlate linearmente, la funzione che descrive la correlazione è del tipo:

$$y = a \cdot x + b$$

dove a e b sono dei valori costanti.

La proporzionalità quadratica

Consideriamo l'area di un cerchio in funzione del suo raggio: $A = \pi \cdot r^2$. Costruiamo la → tabella 2.

Tabella 2

Raggio (cm)	0	1	2	3	4	...
Area (cm^2)	0	π	4π	9π	16π	...

Al raddoppiare del raggio l'area diventa 4 volte più grande, al triplicare del raggio l'area diventa 9 volte più grande e così via.

Quando due grandezze si comportano in questo modo si dice che sono legate da una **proporzionalità quadratica**.

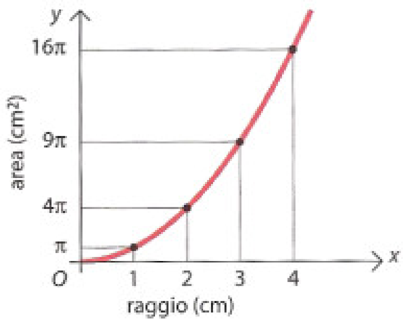
La rappresentazione grafica della proporzionalità quadratica è in → figura 2*a*. La curva si chiama **parabola**.

Costruiamo ora la → tabella 3, riportando nella prima riga il quadrato del raggio e nella seconda l'area.

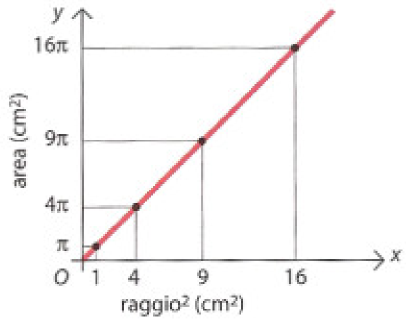
Tabella 3

Raggio^2 (cm^2)	0^2	1^2	2^2	3^2	4^2	...
Area (cm^2)	0	π	4π	9π	16π	...

Rappresentiamo graficamente la tabella e vediamo che tutti i punti sono allineati con l'origine degli assi [→ figura 2*b*]. Possiamo quindi affermare che l'area del cerchio è direttamente proporzionale al quadrato del raggio.



a Area in funzione del raggio: le due grandezze non sono direttamente proporzionali.



b Area in funzione di r^2: l'area è direttamente proporzionale al quadrato del raggio.

Figura 2
Area del cerchio.

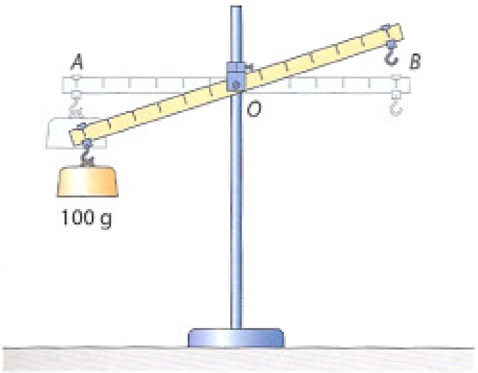
In generale, se due grandezze y e x sono legate da una proporzionalità quadratica, vale una formula del tipo:

$$y = a \cdot x^2$$

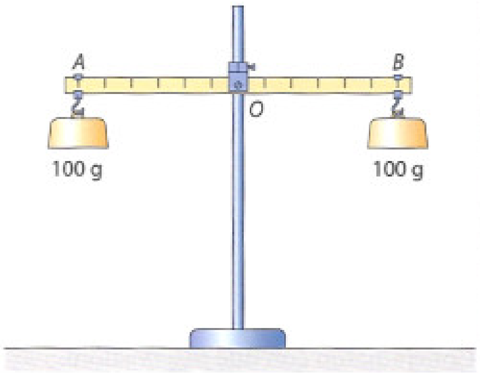
dove a è una costante.

La proporzionalità inversa

Nella → figura 3*a* è rappresentata un'asta suddivisa in 12 parti, vincolata nel centro *O*. Nell'estremo *A* è appesa una massa di 100 g. Poiché in queste condizioni l'asta ruoterebbe in senso antiorario, la equilibriamo con una massa uguale appesa nell'estremo *B*, distante 60 cm dal centro *O*, come mostrato nella → figura 3*b*. La massa equilibrante può essere appesa anche in un punto diverso da *B*. Equilibrando varie volte l'asta con masse sistemate in punti diversi, si ottiene la → tabella 4.



a L'asta ruota in senso antiorario: non è in equilibrio.



b L'asta è in equilibrio perché masse uguali sono appese alla stessa distanza dal vincolo *O*.

Figura 3
Equilibrio di un'asta.

Tabella 4

Distanza (cm)	60	50	40	30	20	10
Massa equilibrante (g)	100	120	150	200	300	600

Se si dimezza la distanza (30 cm), la massa equilibrante raddoppia (200 g), se la distanza si riduce a un terzo (20 cm), la massa equilibrante triplica (300 g). In tutti i casi, il prodotto della massa per la distanza si mantiene costante e uguale a 6000 g·cm.

online.zanichelli-it/ruffo_fisica
LABORATORIO DI INFORMATICA
La costruzione dei grafici con Excel, 2 pagine

Indicate con d_1 e d_2 due distanze e con m_1 e m_2 le rispettive masse equilibranti, vale la seguente uguaglianza:

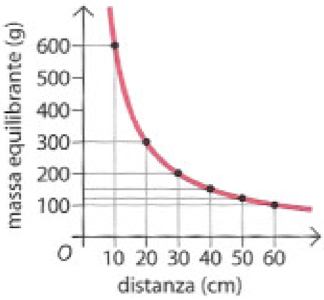
$$d_1 \cdot m_1 = d_2 \cdot m_2$$

Quando due grandezze fisiche si comportano in questo modo si dicono **inversamente proporzionali**.

> In generale, se y e x sono due grandezze inversamente proporzionali il loro prodotto si mantiene costante:
>
> $$x \cdot y = k$$
>
> dove la lettera k indica la costante.

Nel caso della → tabella 4 il valore della costante è 6000 g·cm.
Il grafico dell'inversa proporzionalità è una curva che si chiama **iperbole** [→ figura 4].

Figura 4
La curva che rappresenta due grandezze inversamente proporzionali prende il nome di *iperbole*.



La proporzionalità inversa quadratica

In alcuni fenomeni fisici, una grandezza variabile y è inversamente proporzionale non a un'altra variabile x, come nel paragrafo precedente, ma al quadrato di x. In tal caso si dice che y è legato a x da una **proporzionalità inversa quadratica**, e il legame fra le due variabili è:

$$y \cdot x^2 = k$$

dove k rappresenta un valore costante.

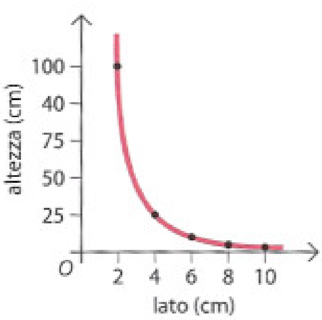
Per spiegare questo tipo di legame, facciamo ricorso a un esempio di geometria. Il volume di un prisma a base quadrata è $V = A \cdot h$, dove A è l'area di base e quindi $A = l^2$. Consideriamo una serie di prismi che hanno tutti lo stesso volume, per esempio 400 cm^3, ma lati diversi: 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm…

Calcoliamo le altezze dei prismi con la formula inversa: $h = \frac{V}{l^2}$ e costruiamo la → tabella 5.

Tabella 5

Lato (cm)	2	4	6	8	10	…
Altezza (cm)	100	25	11,1	6,25	4,0	…

Figura 5
L'altezza del prisma in funzione del lato.



Notiamo che all'aumentare del lato l'altezza diminuisce; però le due variabili non sono inversamente proporzionali perché al raddoppiare del lato l'altezza non dimezza ma diventa 4 volte più piccola. L'altezza è inversamente proporzionale al quadrato del lato. L'inversa proporzionalità quadratica è rappresentata graficamente nell → figura 5.

Altre relazioni

Concludiamo con due osservazioni.

- Esistono molti fenomeni in cui le variabili sono legate da relazioni matematiche più complesse di quelle di cui abbiamo parlato.
- Date due grandezze fisiche x e y, non sempre è possibile scrivere una formula che permette di calcolare i valori di una grandezza, noti quelli dell'altra. Per esempio, se consideriamo la → tabella 6 (temperatura nelle varie ore del giorno) vediamo che non c'è nessuna relazione fra le due grandezze.

Tabella 6

Ora (h)	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (°C)	5	8	14	15	14,5	13	11	7	6